MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

28. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 22. MAI 1928)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

28. Band. **Inhalt:** 3. Heft.

Seite

Patai, L., Über die Reihe der unendlichen Kardinalzahlen 321
Bernstein, S., Demonstration du théorème de M. Hilbert sur la nature analytique des solutions des équations du type elliptique sans l'emploi des séries normales 330
Müller, M., Beweis eines Satzes des Herrn H. Kneser über die Gesamtheit der Lösungen, die ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen durch einen Punkt schickt 349
Andersen, A. F., Bemerkung zum Beweis des Herrn Knopp für die Äquivalenz der Cesàro- und Hölder-Summabilität 356
Jarník, V., Umordnung von bedingt konvergenten Reihen 360
Gleißberg, W., Über einen Satz von Herrn I. Schur 372
Perron, O., Über einen Satz von Besicovitsch 383
Lichtenstein, L., Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Dritte Abhandlung. Permanente Bewegungen einer homogenen, inkompressiblen, zähen Flüssigkeit 387
Wintner, A., Untersuchungen über Funktionen großer Zahlen. (Erste Mitteilung) 416
Wintner, A., Über die Existenz der Hillschen Mondbahn of maximum lunation und der Poincaréschen Schlingbahnen 430
Wintner, A., Zur Analysis im Hilbertschen Raume 451
Estermann, Th., Über den Vektorenbereich eines konvexen Körpers 471
Wintner, A., Über den Konvergenzbegriff der mathematischen Statistik 476

Über die Reihe der unendlichen Kardinalzahlen.

Von

Ladislaus Patai in Budapest.

Nach einem Satze von Julius König[1]) gilt für jedes Alef, dessen Index mit ω konfinal ist, die folgende Ungleichung:

$$\aleph_\mu^{\aleph_0} > \aleph_\mu. \tag{1}$$

Es läßt sich nun die Frage stellen, ob diese Ungleichung für jedes Alef besteht, dessen Index eine Limeszahl ist. Ich habe vergeblich versucht die Ungleichung (1) allgemein zu beweisen, bis mir endlich auf Grund des Wohlordnungssatzes gelungen ist, die Existenz eines Limesindex μ zu beweisen, für welchen die Ungleichung (1) nicht besteht. Dieses Resultat ist im Vergleich mit dem obigen Satze von J. König im ersten Augenblicke überraschend, aber wenn man tiefer nachdenkt, so lassen sich auf Grund dieser Tatsache solche Eigenschaften der Alefreihe erkennen, die die Cantorsche Vermutung und deren entsprechende Verallgemeinerung sehr wahrscheinlich machen.

In meinen Untersuchungen spielt ein Lemma eine wichtige Rolle, welches ich im § 1 durch Modifizierung einer Bernsteinschen Methode beweise. Ich erwähne, ohne ausführlich darauf einzugehen, daß sich durch Anwendung dieser Methode unter anderen auch ein einfacher Beweis des Satzes $\aleph_x^2 = \aleph_x$ ergibt.

Ich spreche an dieser Stelle meinen wärmsten Dank Herrn Dénes König aus, der mich in meiner Arbeit mit zahlreichen wertvollen Ratschlägen unterstützte, und dem ich unter anderem die Vereinfachung und wesentliche Berichtigung des Beweises von Lemma (2) verdanke.

[1]) J. König, Zum Kontinuumproblem, Math. Annalen 60 (1905), S. 177.

§ 1.

Das erwähnte Lemma lautet:

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \sum_{x<\Omega_1} \aleph_x^{\aleph_0}, \tag{2}$$

wo Ω_1 die Anfangszahl der dritten Zahlklasse bedeutet.

Betrachten wir nämlich die Menge M der abzählbaren Folgen

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k, \ldots),$$

wo jedes μ_k eine beliebige Ordnungszahl bedeutet, die kleiner ist als Ω_{Ω_1} (d. h. $\overline{\mu}_k < \aleph_{\Omega_1}$). Die Mächtigkeit dieser Menge M ist, wie unmittelbar ersichtlich, $\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0}$.

Zu jedem Element μ von M gehört eine Zahl β_μ als die kleinste, die größer ist als sämtliche Elemente von μ. Es ist klar, daß $\beta_\mu < \Omega_{\Omega_1}$ ist, weil sonst Ω_{Ω_1} konfinal mit ω wäre, ferner daß β_μ entweder eine ω-Limeszahl oder überhaupt keine Limeszahl ist ($\beta_\mu = \xi + 1$). Für beide Fälle beweisen wir folgenden Satz:

Ist $\aleph_x$ $(x < \Omega_1)$ die Mächtigkeit der Ordnungszahl β_μ, so bilden die entsprechenden M-Elemente eine Menge, M_{β_μ}, von der Mächtigkeit $\aleph_x^{\aleph_0}$.

Erster Fall. $\beta_\mu = \xi + 1$. Dann wird M_{β_μ} von jenen

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k, \ldots)$$

Folgen gebildet, wo jedes $\mu_k \leqq \xi$ und mindestens ein $\mu_k = \xi$ ist.

Es ist klar, daß M_{β_μ} eine Teilmenge von der Menge der Elemente

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k, \ldots) \qquad (\mu_k \leqq \xi)$$

ist, also ist die Mächtigkeit von M_{β_μ}

$$m_{\beta_\mu} \leqq \bar{\xi}^{\aleph_0} = \aleph_x^{\aleph_0}.$$

Andererseits bilden die Elemente

$$\mu = (\xi, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k, \ldots) \qquad (\mu_k \leqq \xi)$$

eine Teilmenge der Menge M_{β_μ}, also

$$m_{\beta_\mu} \geqq \aleph_x^{\aleph_0}$$

und also nach dem Äquivalenzsatz:

$$m_{\beta_\mu} = \aleph_x^{\aleph_0}.$$

Zweiter Fall. β_μ ist ein ω-Limes. $\beta_\mu = \lim \mu_k'$.

Dann ist M_{β_μ} eine Teilmenge der Menge der Elemente

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k, \ldots) \qquad (\mu_k \leqq_\mu \beta),$$

also

$$m_{\beta_\mu} \leqq \bar{\beta}_\mu^{\aleph_0} = \aleph_x^{\aleph_0}.$$

Andererseits ist die Gesamtheit der Elemente

$$\mu = (\mu_1, \mu_1', \mu_2, \mu_2', \ldots, \mu_k, \mu_k', \ldots),$$

wo $\mu_k < \beta_\mu$ und $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_k', \ldots$ die obigen Konstanten sind, eine Teilmenge von der Menge M_{β_μ}, also

$$m_{\beta_\mu} \geqq \aleph_x^{\aleph_0}$$

und nach dem Äquivalenzsatz

$$m_{\beta_\mu} = \aleph_x^{\aleph_0}.$$

Wir haben also damit bewiesen, daß die Mächtigkeit der Menge einem β_μ von der Mächtigkeit $\aleph_x$ entsprechenden Elemente $\bar{\beta}_\mu^{\aleph_0} = \aleph_x^{\aleph_0}$ ist, wenn nur ein solches μ existiert, d. h. wenn β_μ entweder kein Limes oder ein ω-Limes ist.

Sämtliche, den Ordnungszahlen von der Mächtigkeit $\aleph_x$ entsprechenden Elemente μ bilden also eine Menge von der Mächtigkeit $\sum \bar{\beta}_\mu^{\aleph_0}$, wo die Summation auf alle β_μ auszudehnen ist, für welche $\bar{\beta}_\mu = \aleph_x$ und die entweder keine Limeszahlen oder ω-Limeszahlen sind. Letztere Beschränkung ändert nicht die Mächtigkeit der Menge der Bedingung $\Omega_x \leqq \beta_\mu < \Omega_{x+1}$ (d. h. $\bar{\beta}_\mu = \aleph_x$) entsprechenden β_μ.[2]) Letztere Mächtigkeit ist also: $\sum \bar{\beta}_\mu^{\aleph_0} = \aleph_x^{\aleph_0} \cdot \aleph_{x+1}$.

Also ergibt sich für die Mächtigkeit der Menge M:

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \sum_{x < \Omega_1} \aleph_x^{\aleph_0} \cdot \aleph_{x+1}.$$

Dabei ist die Summation auf alle $x < \Omega_1$ auszudehnen, weil für jedes x eine Nicht-Limeszahl von der Mächtigkeit $\aleph_x$ existiert. Daraus läßt sich weiter schließen

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \sum_{x < \Omega_1} \aleph_x^{\aleph_0} \cdot \aleph_{x+1} \leqq \sum_{x+1 < \Omega_1} \aleph_{x+1}^{\aleph_0} \leqq \sum_{x < \Omega_1} \aleph_x^{\aleph_0}.$$

Andererseits

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \sum_{x < \Omega_1} \aleph_x^{\aleph_0} \cdot \aleph_{x+1} \geqq \sum_{x < \Omega_1} \aleph_x^{\aleph_0},$$

also nach dem Äquivalenzsatz:

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \sum_{x < \Omega_1} \aleph_x^{\aleph_0}, \qquad \text{q. e. d.}$$

---

[2]) Wenn wir nämlich aus der Menge der Ordnungszahlen von der Mächtigkeit $\aleph_x$ jene Limeszahlen weglassen, die keine ω-Limes sind (oder sogar sämtliche Limeszahlen), so bleibt die Mächtigkeit der Menge $\aleph_{x+1}$.

§ 2.

Mit der im vorigen Paragraphen angewandten Methode können wir den sogenannten Alefsatz des Herrn F. Bernstein[3]) beweisen, nach welchem

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \aleph_0^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu \tag{3}$$

ist, falls μ und ν endliche Indizes bedeuten.

Dieser Satz ist trivial für $\mu \leqq \nu$ und in diesem Falle ist er allgemein (nicht nur für endliche Indizes) gültig. Wenn aber $\mu > \nu$, so ist nach den Überlegungen in § 1 (in dem wir noch die Summe durch ihr größtes Glied ersetzen)

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \sum_{x=0}^{\mu-1} \aleph_x^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_{x+1} = \aleph_{\mu-1}^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu ,$$

und wenn diese Formel der Reihe nach auf $\mu - 1$, $\mu - 2, \ldots$ angewandt wird, dann ergibt sich weiter:

$$\aleph_\mu^{\aleph_\nu} = \aleph_{\mu-1}^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu = \aleph_{\mu-2}^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_{\mu-1} \cdot \aleph_\mu = \ldots = \aleph_0^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_1 \cdot \aleph_2 \ldots \aleph_\mu = \aleph_0^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_\mu .$$ [4])

Ähnliche Betrachtungen führen zu der folgenden von Herrn F. Hausdorff[5]) herrührenden Verallgemeinerung des Bernsteinschen Satzes:

Wenn μ und ν beliebige endliche oder transfinite Ordnungszahlen bedeuten, so ist

$$\aleph_{\mu+1}^{\aleph_\nu} = \aleph_\mu^{\aleph_\nu} \cdot \aleph_{\mu+1} . \tag{4}$$

§ 3.

Unter der Voraussetzung des Wohlordnungssatzes können wir aus dem Lemma (2) interessante Folgerungen ziehen.

Wir zeigen, daß, wenn in der Reihe

$$\aleph_0^{\aleph_0}, \aleph_1^{\aleph_0}, \aleph_2^{\aleph_0}, \ldots, \aleph_\omega^{\aleph_0}, \aleph_{\omega+1}^{\aleph_0}, \ldots, \aleph_\xi^{\aleph_0}, \ldots \qquad (\xi < \Omega_1)$$

---

[3]) F. Bernstein, Untersuchungen aus der Mengenlehre, Math. Annalen **61** (1905), S. 150.

[4]) Es ist klar ersichtlich, warum sich auf diesem Wege der Bernsteinsche Satz nicht in voller Allgemeinheit beweisen läßt. Z. B. können wir nicht behaupten, daß $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \sum_{x<\omega} \aleph_x^{\aleph_0}$ ist, weil auch zur Ordnungszahl Ω_ω (als β_μ) Elemente gehören, sogar bilden diese Elemente eine Menge von der Mächtigkeit $\aleph_\omega^{\aleph_0}$, also führt die Anwendung der Methode zu dem nichtssagenden Ergebnis: $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \sum_{x<\omega} \aleph_x^{\aleph_0} + \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

[5]) F. Hausdorff, Jahresbericht der deutschen Math.-Ver. **13** (1904), S. 570.

zu jeder Mächtigkeit eine größere gibt[6]*), so ist*

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \aleph_{\Omega_1}. \tag{5}$$

Nach der Voraussetzung ist nämlich dann für jedes $\xi < \Omega_1$:

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} < \aleph_{\Omega_1}, \tag{6}$$

weil im entgegengesetzten Falle

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} \geqq \aleph_{\Omega_1}$$

und daraus

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} \geqq \aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0},$$

also

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} = \aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0}$$

und, indem man wieder den Äquivalenzsatz anwendet,

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} = \aleph_{\xi+1}^{\aleph_0} = \ldots = \aleph_\mu^{\aleph_0} = \ldots \qquad (\xi \leqq \mu \leqq \Omega_1)$$

folgen würde, im Gegensatz zu der Voraussetzung, daß unsere Reihe kein größtes Glied enthält. Wenn wir nun in der Gleichung

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \sum_{\xi < \Omega_1} \aleph_\xi^{\aleph_0}$$

für jedes $\aleph_\xi^{\aleph_0}$ das als größer erwiesene $\aleph_{\Omega_1}$ setzen, so ergibt sich:

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \sum_{\xi < \Omega_1} \aleph_\xi^{\aleph_0} \leqq \sum_{\xi < \Omega_1} \aleph_{\Omega_1} = \aleph_1 \cdot \aleph_{\Omega_1} = \aleph_{\Omega_1}.$$

Andererseits ist

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} \geqq \aleph_{\Omega_1},$$

also nach dem Äquivalenzsatz:

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \aleph_{\Omega_1}.$$

Dieses Ergebnis können wir auch so ausdrücken, daß eine Ordnungszahl $\xi < \Omega_1$ existiert, für welche

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \aleph_\xi^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\Omega_1}. \tag{7}$$

In der Tat: ist unsere Reihe wachsend, so gilt für jedes $\xi < \Omega_1$, da nach (6) $\aleph_\xi^{\aleph_0} < \aleph_{\Omega_1}$ ist,

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\Omega_1} = \aleph_{\Omega_1} = \aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0};$$

wenn aber die Glieder der Reihe von einem bestimmten Gliede $\aleph_\xi^{\aleph_0}$ an

[6]) Diese Voraussetzung fordert weniger als die Voraussetzung $\aleph_x^{\aleph_x} = \aleph_{x+1}$, welche die Verallgemeinerung der Cantorschen Vermutung $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1$ ist.

gleich sind, also

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} = \aleph_{\xi+1}^{\aleph_0} = \ldots = \aleph_\mu^{\aleph_0} = \ldots \qquad (\mu < \Omega_1)$$

ist, so ist, indem wir $\aleph_\xi^{\aleph_0}$ mit $\aleph_x$ bezeichnen $(x \geqq \xi)$, $\aleph_\xi^{\aleph_0} < \aleph_{x+1} \leqq \aleph_{x+1}^{\aleph_0}$, also kann x nicht kleiner als Ω_1 sein. Hieraus folgt:

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} \geqq \aleph_{\Omega_1},$$

also

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} = \aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0}$$

und endlich

$$\aleph_\xi^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\Omega_1} = \aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0}.$$

Unsere Behauptung ist somit bewiesen.

Die kleinste Ordnungszahl, die die Gleichung

$$\overline{\aleph}_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \aleph_\xi^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\Omega_1}$$

befriedigt, ist entweder 0 *oder eine Limeszahl.*

Im entgegengesetzten Falle wäre nämlich, da man dann ξ in der Form $\xi = \mu + 1$ schreiben kann,

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \aleph_{\mu+1}^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\Omega_1}$$

und, da $\mu + 1$ $(< \Omega_1)$ die kleinste dieser Forderung genügende Ordnungszahl ist,

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} > \aleph_\mu^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\Omega_1}.$$

Daraus folgt

$$\aleph_\mu^{\aleph_0} < \aleph_{\mu+1}^{\aleph_0}$$

und, da aus $\aleph_\mu^{\aleph_0} > \aleph_\mu$ die Ungleichung $\aleph_\mu^{\aleph_0} \geqq \aleph_{\mu+1}$ und (indem man $\aleph_0$-ten Potenz erhebt) $\aleph_\mu^{\aleph_0} \geqq \aleph_{\mu+1}^{\aleph_0}$ folgen würde,

$$\aleph_\mu^{\aleph_0} = \aleph_\mu.$$

Nach dem Satze von Bernstein-Hausdorff ist aber dann:

$$\aleph_{\mu+1}^{\aleph_0} = \aleph_\mu^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\mu+1} = \aleph_\mu \cdot \aleph_{\mu+1} = \aleph_{\mu+1}.$$

So erhält man:

$$\aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \aleph_{\mu+1}^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\Omega_1} = \aleph_{\mu+1} \cdot \aleph_{\Omega_1} = \aleph_{\Omega_1}$$

und

$$\aleph_0^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\Omega_1} \leqq \aleph_{\mu+1}^{\aleph_0} \aleph_{\Omega_1} = \aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0} = \aleph_{\Omega_1}.$$

Hieraus ergibt sich, indem man noch einmal den Äquivalenzsatz anwendet, daß $\xi = 0$ die kleinste Wurzel der obigen Gleichung wäre, was unserer Voraussetzung widerspricht.

§ 4.

Das Lemma (2) können wir leicht folgendermaßen verallgemeinern:

Wenn $x_1 < x_2 < \ldots < x_\omega < \ldots < x_\mu < \ldots$ *eine Reihe wachsender Ordnungszahlen vom Typus* Ω_1 *ist, die die Zahl* β *als Limes besitzen, so ist*

$$\aleph_\beta^{\aleph_0} = \sum_{\mu < \Omega_1} \aleph_{x_\mu}^{\aleph_0}. \tag{8}$$

Ebenso gilt der noch allgemeinere Satz:

Sei $x_1 < x_2 < \ldots < x_\omega < \ldots < x_\mu < \ldots$ *eine Reihe wachsender Ordnungszahlen vom Typus* Ω_γ, *die die Zahl* β *als Limes besitzen, und es sei* Ω_ξ *die kleinste Anfangszahl, die mit* Ω_γ *konfinal ist, dann ist für jedes* $\alpha < \xi$:

$$\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} = \sum_{\mu < \Omega_\gamma} \aleph_{x_\mu}^{\aleph_\alpha}. \tag{9}$$

Auf Grund der Formel (8) *sind wir jetzt imstande ein Alef mit Limesindex* (β) *zu konstruieren, für welches die Ungleichung* (1) *nicht gilt.*

Definieren wir nämlich die Reihe der Ordnungszahlen $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots$ bzw. die Alefreihe $\aleph_{x_1}, \aleph_{x_2}, \ldots, \aleph_{x_\mu}, \ldots$ vom Typus Ω_1, wo[7])

$$\aleph_{x_1} = \aleph_0^{\aleph_0}; \quad \aleph_{x_2} = \aleph_{x_1+1}^{\aleph_0}; \quad \aleph_{x_3} = \aleph_{x_2+1}^{\aleph_0}; \ \ldots.$$

$$\aleph_{x_\omega} = \Big(\sum_{\mu < \omega} \aleph_{x_\mu}\Big)^{\aleph_0}; \quad \aleph_{x_\omega+1} = \aleph_{x_\omega+1}^{\aleph_0}; \quad \aleph_{x_\omega+2} = \aleph_{x_\omega+1+1}^{\aleph_0}; \ \ldots.$$

$$\aleph_{x_{\omega \cdot 2}} = \Big(\sum_{\mu < \omega \cdot 2} \aleph_{x_\mu}\Big)^{\aleph_0}; \ \ldots.$$

Im allgemeinen definieren wir diese Reihe durch transfinite Induktion folgendermaßen:

$$\aleph_{x_\mu} = \aleph_{x_{\mu-1}+1}^{\aleph_0}, \quad \text{wenn } \mu \text{ keine Limeszahl ist,}$$

$$\aleph_{x_\mu} = \Big(\sum_{\nu < \mu} \aleph_{x_\nu}\Big)^{\aleph_0}, \quad \text{wenn } \mu \text{ eine Limeszahl ist.}$$

Bezeichne β den Limes der so definierten Reihe. Für jedes Glied $\aleph_\mu$ der Reihe ist $\aleph_\mu^{\aleph_0} = \aleph_\mu$, also ist nach dem obigen

$$\aleph_\beta^{\aleph_0} = \sum_{\mu < \Omega_1} \aleph_{x_\mu}^{\aleph_0} = \sum_{\mu < \Omega_1} \aleph_{x_\mu} = \aleph_\beta, \quad \text{q. e. d.}$$

[7]) Ursprünglich bediente ich mich der Reihe $\aleph_{x_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$; $\aleph_{x_2} = \aleph_{x_1+\omega}^{\aleph_0}$; $\aleph_{x_3} = \aleph_{x_2+\omega}^{\aleph_0}$; ... zur Definition des $\aleph_\beta$. Das einfachere Verfahren des Textes verdanke ich Herrn Dénes König. Ich bemerke, daß beide Verfahren zum selben $\aleph_\beta$ führen.

§ 5.

Betrachten wir die Reihe der $\aleph_0$-ten Potenzen sämtlicher Alefs:

$$(I) \qquad \aleph_0^{\aleph_0},\ \aleph_1^{\aleph_0},\ \aleph_2^{\aleph_0},\ \ldots,\ \aleph_\omega^{\aleph_0},\ \ldots,\ \aleph_{\Omega_1}^{\aleph_0},\ \ldots,\ \aleph_{\Omega_\mu}^{\aleph_0},\ \ldots.$$

Diese Reihe enthält sämtliche Alefs, für welche

$$\aleph_x^{\aleph_0} = \aleph_x$$

ist. Also ist $\aleph_0^{\aleph_0}$ das kleinste Alef, für welches diese Gleichung Gültigkeit hat[8]). Wird jedes Element der Reihe (I) *nur einmal* aufgeschrieben, so erhalten wir die Reihe

$$(II) \qquad \aleph_{\alpha_1},\ \aleph_{\alpha_2},\ \aleph_{\alpha_3},\ \ldots,\ \aleph_{\alpha_\mu},\ \ldots,$$

wo $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_\mu < \ldots$.

Die Glieder der Reihe (II) *folgen „fast" lückenlos aufeinander.* Das ist so zu verstehen, daß nach einem beliebigen Glied, $\aleph_\xi$, der Reihe (II) die Mächtigkeit $\aleph_{\xi+1}$ folgt, weil aus der Gleichung $\aleph_\xi^{\aleph_0} = \aleph_\xi$ nach dem Satze von Bernstein-Hausdorff auch $\aleph_{\xi+1}^{\aleph_0} = \aleph_{\xi+1}$ folgt. Sprünge können also nur vor einem solchen Gliede auftreten, das kein unmittelbar Vorangehendes besitzt. Solche Sprünge existieren jedenfalls, denn der Satz von J. König besagt eben, daß diejenigen Alefs, deren Index mit ω konfinal ist, nicht zur Reihe (II) gehören[9]). Auf Grund des § 4 können wir behaupten, daß die Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu, \ldots$ die Eigenschaft besitzt, daß wenn ξ der Limes eines solchen Teiles der Reihe ist, der nicht den Typus ω besitzt, so gehört ξ der Reihe an. Nehmen wir z. B. die $\{\alpha_\mu\}$, wo $\mu < \Omega_1$. Sei $\lim \alpha_\mu = \xi$. Dann gilt $\aleph_\xi = \sum_{\mu<\Omega_1} \aleph_{\alpha_\mu} = \sum_{\mu<\Omega_1} \aleph_{\alpha_\mu}^{\aleph_0}$ und ferner ist nach (8) $= \aleph_\xi^{\aleph_0}$ und es ist $\aleph_\xi$ in der Reihe (II) enthalten[10]). Wird (9) statt (8) angewendet, so ergibt sich der allgemeine Satz:

In der Alefreihe gibt es für jedes ξ einen mit Ω_1 (sogar mit Ω_γ) konfinalen Index, $\mu > \xi$, für welchen

$$\aleph_\mu^{\aleph_0} = \aleph_\mu.$$

Dies läßt sich auch so ausdrücken, daß in der Reihe der transfiniten Ordnungszahlen zu jedem beliebigen ξ eine mit Ω_1 konfinale Anfangszahl,

---

[8]) Diese Tatsache steht im Einklange mit einer Bemerkung des Herrn W. Sierpiński, laut welcher damit $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$ sei, notwendig und hinreichend ist, daß α die kleinste Ordnungszahl sei, die die Gleichung $\aleph_x^{\aleph_0} = \aleph_x$ befriedigt. W. Sierpiński: „Sur l'hypothèse du continu". Fund. Math. **5** (1924), p. 182.

[9]) Z. B. ist $\sum_{\mu<\omega} \aleph_{\alpha_\mu} = \aleph_{\alpha_1+\omega}$ nicht ein Glied der Reihe.

[10]) Es ist $\xi = \alpha_{\Omega_1}$.

$\mu > \xi$, *angeben läßt, für welche*

$$\bar{\mu}^{\aleph_0} = \bar{\mu}. \tag{10}$$

Andererseits ist nach dem Satze von J. König für jede Anfangszahl, die mit ω konfinal ist:

$$\bar{\mu}^{\aleph_0} > \bar{\mu}. \tag{11}$$

Wenn $\bar{\mu}$ die Mächtigkeit irgendeiner Anfangszahl μ bedeutet, dann scheint die Antwort auf die Frage, ob $\bar{\mu}^{\aleph_0}$ größer oder gleich $\bar{\mu}$ ist, nicht von der Größe von μ, sondern nur davon abzuhängen, mit welcher Anfangszahl μ konfinal ist. Wenigstens lassen Gleichung (10) und Ungleichung (11) darauf schließen. *Also ist mit größter Wahrscheinlichkeit die Gleichung* (10) *für jede mit* Ω_1 *konfinale Anfangszahl, also auch für* Ω_1 *selbst gültig, d. h.*

$$\Omega_1^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0} = \Omega_1 = \aleph_1.$$

Das ist die Cantorsche Vermutung[11]).

Analog läßt sich auf Grund des allgemeinen Satzes von § 4 auf die Wahrscheinlichkeit der Vermutung $\aleph_x^{\aleph_x} = \aleph_{x+1}$ schließen.

Vorliegende Arbeit wurde am 18. Januar 1926 der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt.

Budapest, den 3. Dezember 1925.

[11]) Weil $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$ ist.

(Eingegangen am 2. Februar 1926.)

Zusatz bei der Korrektur. Vorliegende Arbeit war schon beendet, als ich von der Arbeit „Quelques théorèmes sur les alephso“ des Herrn A. Tarski (Fundamenta Mathematicae 7 (1925)), welche manche Berührungspunkte mit meinen vorliegenden Untersuchungen aufweist, Kenntnis erhielt.

Demonstration du théorème de M. Hilbert sur la nature analytique des solutions des équations du type elliptique sans l'emploi des séries normales.

Par

S. Bernstein à Kharkow.

Introduction.

Le présent travail, dans la rédaction duquel j'ai été aidé par M^me^ A. Minajlo, contient la traduction, avec quelques développements, de la seconde démonstration de la nature analytique des solutions des équations du type elliptique que j'ai donnée en 1908 [1]). Tandis que la première démonstration s'appuie essentiellement sur les séries normales dont l'emploi paraît indispensable pour l'application générale de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'intérieur d'un cercle, la seconde démonstration, que nous reprenons ici, consiste à appliquer la méthode des approximations successives à un anneau compris entre deux cercles concentriques; en procédant ainsi, on évite les difficultés accessoires qui proviennent du rôle spécial de l'origine dans la transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires qui avaient nécessité l'introduction des séries normales. Pour ne pas trop allonger cet article par des calculs secondaires nous renvoyons le lecteur au Mémoire «Sur la nature analytique des solutions etc.» Mathém. Ann. t. 59 (1904) toutes les fois, où il n'y a rien à changer ou ajouter aux formules établies dans ce Mémoire [2]) qui se rattache au cas du cercle [3]).

[1]) Communications de la Société Mathémat. de Kharkow „Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптическаго типа".

[2]) Nous ferons le renvoi à ce Mémoire par les lettres: loc. cit.

[3]) Es sei bei dieser Gelegenheit auch noch auf die eleganten Ausführungen von Herrn T. Radó hingewiesen, durch die die grundlegenden Untersuchungen von Herrn S. Bernstein dem weiteren Publikum bequem zugänglich gemacht worden sind. Vgl. T. Radó, Das Hilbertsche Theorem über den analytischen Charakter der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Zeitschrift **25** (1926), S. 514—589. Die Schriftleitung.

§ 1.

1. Soit

$$F(x, y) = F(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta) = A_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta .$$

Nous appellerons module trigonométrique de $F(x\,y)$ dans la région σ de la variable ϱ la somme de la série $\{A_0\}_\sigma + \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\}_\sigma + \{B_n\}_\sigma = \{F(x\,y)\}_\sigma$ où $\{A_n\}_\sigma$ est le maximum du module de la fonction A_n dans une région σ. Il est aisé de s'assurer que la fonction F ayant dans une certaine aire σ complexe le module trigonometrique fini est analytique par rapport à la variable ϱ à l'intérieur de cette aire, quelle que soit la valeur reelle θ (sans être nécessairement analytique par rapport à cette dernière). En particulier, on a $|F(x, 0)| \leqq \{F(x, y)\}_\sigma$, si x se trouve dans la région σ; et, de même, $|F(0, y)| \leqq \{F(x, y)\}_\sigma$, lorsque y se trouve dans la région σ. De la définition du module trigonométrique il résulte que

$$(1) \qquad \{F(f_1, f_2, \ldots, f_n)\}_\sigma \leqq \overset{+}{F}(\{f_1\}_\sigma\{f_2\}_\sigma \cdots \{f_n\}_\sigma),$$

où F designe un développement de Taylor quelconque suivant les puissances de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et $\overset{+}{F}$ est le même développement, lorsqu'on y remplace tous les coefficients par leurs modules.

Nous considérerons également le module trigonométrique d'une fonction $F = A_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta$ sur le segment $R_1 R$

$$\{F(x, y)\}_{R_1 R} = \{A_0\}_{R_1 R} + \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\}_{R_1 R} + \{B_n\}_{R_1 R},$$

où $\{A_n\}_{R_1 R}$ est le maximum du module de la fonction A_n sur le segment $R_1 R$. Naturellement, $\{F(x\,y)\}_{R_1 R}$ peut être fini sans que F soit analytique par rapport à ϱ sur $R_1 R$. On aura aussi, évidemment,

$$(1^{bis}) \quad \{F(f_1, f_2, \ldots, f_n)\}_{R_1 R} \leqq F(\{f_1\}_{R_1 R}\{f_2\}_{R_1 R}, \ldots, \{f_n\}_{R_1 R}).$$

Dans la suite nous prendrons toujours comme région σ, un losange ayant pour diagonale le segment $R_1 R$ $(0 < R_1 < R)$ de l'axe réel de la variable ϱ en supposant que les angles aux sommets R_1 et R du losange sont inférieurs ou égaux à $\frac{\pi}{3}$.

2. Il est aisé d'établir les inégalités, dont nous ferons usage plus loin

$$(I) \qquad \{\varrho^p \int_{\varrho}^{R} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < \frac{2R^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\varrho)\}_\sigma \quad \text{si } p+q+1 \geqq 0,$$

$$\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R_1} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < \frac{2R^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\varrho)\}_\sigma \qquad q \neq -1 .$$

$$(\mathrm{I}^{\mathrm{bis}}) \qquad \{\varrho^p \int_{\varrho}^{R} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < \frac{R^{p+1}}{R_1}\{F(\varrho)\}_\sigma \qquad \text{si } p+q+1 \geqq 0,$$

$$\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R_1} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < \frac{R^{p+1}}{R_1}\{F(\varrho)\}_\sigma \qquad q=-1.$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \{\varrho^p \int_{\varrho}^{R} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < \frac{2R_1^{p+q+1}}{q+1}\{F(\varrho)\}_\sigma \qquad \text{si } p+q+1<0,$$

$$\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R_1} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < \frac{2R_1^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\varrho)\}_\sigma \qquad q\neq -1.$$

$$(\mathrm{II}^{\mathrm{bis}}) \qquad \{\varrho^p \int_{\varrho}^{R} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < R_1^{p-1}R\{F(\varrho)\}_\sigma \qquad \text{si } p+q+1<0,$$

$$\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R_1} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < R_1^{p-1}R\{F(\varrho)\}_\sigma \qquad q=-1.$$

On a d'abord pour $q \neq -1$

$$(2) \qquad \left|\varrho^p \int_{\varrho}^{R} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\right| \leqq |\varrho^p|\{F(\varrho)\}_\sigma \int_{\varrho}^{R} |\varrho|^q |d\varrho|$$

$$\leqq 2\{F(\varrho)\}_\sigma |\varrho|^p \left|\frac{R^{q+1}-|\varrho|^{q+1}}{q+1}\right|,$$

car $\int_{\varrho}^{R} |\varrho|^q \, d\varrho < \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} \int_{|\varrho|}^{R} \varrho^q d\varrho$, puisque l'angle aigu entre OZ et ZR est inférieur à $\frac{\pi}{3}$. Donc, à cause de $p+q+1 \geqq 0$, on a[1])

$$(\mathrm{I}) \qquad \{\varrho^p \int_{\varrho}^{R} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < \frac{2R^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\varrho)\}_\sigma,$$

et de même

$$\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R_1} F(\varrho)^q d\varrho\}_\sigma < \frac{2R^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\varrho)\}_\sigma.$$

En supposant dans (2) $p+q+1<0$, nous avons les inégalités

$$(\mathrm{II}) \qquad \{\varrho^p \int_{\varrho}^{R} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < \frac{2R_1^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\varrho)\}_\sigma,$$

$$\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R_1} F(\varrho)\varrho^q d\varrho\}_\sigma < \frac{2R_1^{p+q+1}}{|q+1|}\{F(\varrho)\}_\sigma,$$

puisque le module minimum de ϱ dans la région considérée est R_1.

[1]) Il n'y a rien à changer au raisonnement, si la limite supérieur d'intégration est R_1 au lieu de R.

Pour $q = -1$ on a, au lieu de (2),

$$\left|\varrho^p \int_{\varrho}^{R} \frac{F(\varrho)}{\varrho} d\varrho\right| \leqq |\varrho|^p \{F(\varrho)\}_\sigma \, 2 \int_{|\varrho|}^{R} \frac{d\varrho}{\varrho} \leqq 2|\varrho|^p \{F(\varrho)\}_\sigma \left|\lg \frac{R}{|\varrho|}\right|$$

$$\leqq 2|\varrho|^p \{F(\varrho)\}_\sigma \lg \frac{R}{R_1}$$

et, puisque

$$\lg \frac{R}{R_1} < \frac{1}{2} \frac{R}{R_1},$$

on obtient

$$\left\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R} \frac{F(\varrho)}{\varrho} d\varrho\right\}_\sigma < \frac{R^{p+1}}{R_1} \{F(\varrho)\}_\sigma \qquad \text{si } p \geqq 0, \tag{I bis}$$

$$\left\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R_1} \frac{F(\varrho)}{\varrho} d\varrho\right\}_\sigma < \frac{R^{p+1}}{R_1} \{F(\varrho)\}_\sigma,$$

et

$$\left\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R} \frac{F(\varrho)}{\varrho} d\varrho\right\}_\sigma < R_1^{p-1} R \{F(\varrho)\}_\sigma \qquad \text{si } p < 0, \tag{II bis}$$

$$\left\{\varrho^p \int_{\varrho}^{R} \frac{F(\varrho)}{\varrho} d\varrho\right\}_\sigma < R_1^{p-1} R \{F(\varrho)\}_\sigma.$$

§ 2.

3. Soit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(x, y) \tag{3}$$

une équation de Poisson dans laquelle $F(x, y)$ admet son module trigonométrique $\{F(x, y)\}_\sigma$ fini à l'intérieur du losange σ considéré plus haut. Nous allons déterminer la solution $v(x, y)$ de (3) qui s'annulle sur les deux cercles C et C_1, de rayon R et $R_1 = \frac{R}{2}$, respectivement, ayant leurs centres à l'origine, et nous allons montrer que $v(x, y)$ et ses dérivées partielles des deux premiers ordres ont également des modules trigonométriques finis à l'intérieur de σ.

Soit

$$F(x, y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

$$v(x, y) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta.$$

Il est aisé de s'assurer que les coefficients C_n et D_n qui doivent s'annuler pour $\varrho = R$ et $\varrho = R_1$ sont donnés par les formules

$$(4)\quad 2n\left[R^{2n} - R_1^{2n}\right] C_n = \left[\varrho^n - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_R^{\varrho} A_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho$$

$$+ \left[\varrho^n - \frac{R^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_{\varrho}^{R_1} A_n \left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho,$$

de même

$$2n\left[R^{2n} - R_1^{2n}\right] D_n = \left[\varrho^n - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_R^{\varrho} B_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho$$

$$+ \left[\varrho^n - \frac{R^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_{\varrho}^{R_1} B_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho_1^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho$$

et pour $n = 0$

$$C_0 = \int_R^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{R_1}^{\varrho} \varrho\, A_0\, d\varrho + \frac{\lg \frac{\varrho}{R}}{\lg \frac{R_1}{R}} \int_{R_1}^{R} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{R_1}^{\varrho} \varrho\, A_0\, d\varrho.$$

Prenons les dérivées

$$2\left[R^{2n} - R_1^{2n}\right] \frac{dC_n}{d\varrho} = \left[\varrho^{n-1} + \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n+1}}\right] \int_R^{\varrho} A_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho$$

$$+ \left[\varrho^{n-1} + \frac{R^{2n}}{\varrho^{n+1}}\right] \int_{\varrho}^{R_1} A_n \left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho,$$

$$(5)\quad 2\left(R^{2n} - R_1^{2n}\right) \frac{d^2 C_n}{d\varrho^2} = \left[(n-1)\varrho^{n-2} - (n+1)\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n+2}}\right] \int_R^{\varrho} A_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho$$

$$+ \left[(n-1)\varrho^{n-2} - (n+1)\frac{R^{2n}}{\varrho^{n+2}}\right] \int_{\varrho}^{R_1} A_n \left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho$$

$$+ 2\left(R^{2n} - R_1^{2n}\right) A_n,$$

$$\frac{dC_0}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho} \int_{R_1}^{\varrho} \varrho\, A_0\, d\varrho + \frac{1}{\varrho \lg \frac{R_1}{R}} \int_{R_1}^{R} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{R_1}^{\varrho} \varrho\, A_0\, d\varrho,$$

$$\frac{d^2 C_0}{d\varrho^2} = A_0 - \frac{1}{\varrho^2} \int_{R_1}^{\varrho} \varrho\, A_0\, d\varrho - \frac{1}{\varrho^2 \lg \frac{R_1}{R}} \int_{R_1}^{R} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{R_1}^{\varrho} \varrho\, A_0\, d\varrho.$$

En vertu des égalités (4)

$$C_n = \frac{1}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})}\cdot\left[\varrho^n\int_R^{\varrho}\frac{A_n(R^{2n}-\varrho^{2n})}{\varrho^{n-1}}\,d\varrho+\frac{R_1^{2n}}{\varrho^n}\int_R^{\varrho}A_n\varrho^{n+1}\,d\varrho\right]$$

$$-\frac{R_1^{2n}R^{2n}}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})}\cdot\frac{1}{\varrho^n}\int_R^{\varrho}\frac{A_n}{\varrho^{n-1}}\,d\varrho-\frac{R^{2n}R_1^{2n}}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})}\cdot\frac{1}{\varrho^n}\int_{\varrho}^{R_1}\frac{A_n}{\varrho^{n-1}}\,d\varrho$$

$$+\frac{1}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})}\left[\varrho^n\int_{\varrho}^{R_1}\frac{A_nR_1^{2n}}{\varrho^{n-1}}\,d\varrho+\frac{R^{2n}-\varrho^{2n}}{\varrho^n}\int_{\varrho}^{R_1}A_n\varrho^{n+1}\,d\varrho\right].$$

Supposons $n\geqq 3$.

En désignant les quatre termes successifs de C_n par α_n, β_n, γ_n, δ_n et en leur appliquant respectivement les inégalités (I), (II), (II) et (I) on obtient

$$\{\alpha_n\}_\sigma<\frac{5R^{2n}\cdot R^2}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})(n-2)}\{A_n\}_\sigma=\frac{5R^2\{A_n\}_\sigma}{2n(n-2)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4n}}<\frac{10R^2}{3n(n-2)}\{A_n\}_\sigma,$$

$$\{\beta_n\}_\sigma<\frac{2R^{2n}\cdot R_1^{2n}\cdot R_1^{2-2n}}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})(n-2)}\{A_n\}_\sigma=\frac{R^{2n}\cdot R^2}{4n(R^{2n}-R_1^{2n})(n-2)}\{A_n\}_\sigma$$

$$<\frac{R^2}{3n(n-2)}\{A_n\}_\sigma,$$

$$\{\gamma_n\}_\sigma<\frac{2R^{2n}\cdot R_1^{2n}\cdot R_1^{2-2n}}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})(n-2)}\{A_n\}_\sigma<\frac{R^2}{3n(n-2)}\{A_n\}_\sigma,$$

$$\{\delta_n\}_\sigma<\frac{5R^{2n}\cdot R^2}{2n(R^{2n}-R_1^{2n})(n-2)}\{A_n\}_\sigma<\frac{10R^2}{3n(n-2)},$$

et par conséquent

$$\{C_n\}_\sigma<\frac{22R^2}{n^2}\{A_n\}_\sigma.$$

Si $n=1$ nous obtenons les mêmes inégalités en remplaçant seulement $n-2$ par $2-n=1$. Ainsi

$$\{C_1\}_\sigma<22R^2\{A_1\}_\sigma.$$

Soit, enfin

$$n=2.$$

En appliquant les inégalités (I^{bis}) et (I), (II^{bis}), (II^{bis}), (I^{bis}) et (I), nous avons:

$$\}_\sigma<2R^2\{A_2\}_\sigma,\ \{\beta_2\}_\sigma<\frac{4}{15}R^2\{A_2\}_\sigma,\ \{\gamma_n\}_\sigma<\frac{4}{15}R^2\{A_2\}_\sigma,\ \{\delta_2\}_\sigma<\frac{3}{2}R^2\{A_2\}_\sigma,$$

d'où

$$\{C_2\}_\sigma<\frac{22R^2}{4}\{A_2\}_\sigma.$$

Donc dans tous les cas, si $n > 0$,

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \{C_n\}_\sigma < \dfrac{22R^2}{n^2}\{A_n\}_\sigma \\ \text{et de même} \\ \{D_n\}_\sigma < \dfrac{22R^2}{n^2}\{A_n\}_\sigma. \end{array}\right.$$

En appliquant les inégalités (I) et (I$^{\text{bis}}$) à C_0 nous aurons pareillement

$$(7)\qquad \{C_0\}_\sigma < 4R^2\{A_0\}_\sigma.$$

Des inégalités (6) et (7) nous concluons que

$$(8)\qquad \begin{array}{l} \{v\}_\sigma < 22R^2\{F(x,y)\}_\sigma, \\ \left\{\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right\}_\sigma < 22R^2\{F(x,y)\}_\sigma, \\ \left\{\dfrac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right\}_\sigma < 22R^2\{F(x,y)\}_\sigma. \end{array}$$

D'une façon analogue, en vertu des égalités (5), nous obtenons:

$$(9)\qquad \left\{\frac{dC_n}{d\varrho}\right\}_\sigma < \frac{\lambda R}{n}\{A_n\}_\sigma, \qquad \left\{\frac{d^2C_n}{d\varrho^2}\right\} < \lambda\{A_n\}_\sigma,$$

et les inégalités correspondantes pour D_n, où λ est une constante fixe, d'où il résulte que

$$(10)\qquad \begin{array}{l} \left\{\dfrac{\partial v}{\partial\varrho}\right\}_\sigma < \lambda R\{F(x,y)\}_\sigma, \quad \left\{\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varrho\,\partial\theta}\right\} < \lambda R\{F(x,y)\}_\sigma, \\ \left\{\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varrho^2}\right\}_\sigma < \lambda\{F(x,y)\}_\sigma. \end{array}$$

En exprimant $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ au moyen des dérivées partielles par rapport à ϱ et θ, en vertu des inégalités (8) et (10), nous obtenons finalement

$$(11)\qquad \begin{array}{l} \{v\}_\sigma < hR^2\{F(xy)\}_\sigma, \\ \left\{\dfrac{\partial v}{\partial x}\right\}_\sigma \leqq \left\{\dfrac{\partial v}{\partial\varrho}\cos\theta\right\}_\sigma + \left\{\dfrac{\partial v}{\varrho\,\partial\theta}\sin\theta\right\}_\sigma < \left\{\dfrac{\partial v}{\partial\varrho}\right\}_\sigma + \dfrac{2}{R}\left\{\dfrac{\partial v}{\partial\theta}\right\}_\sigma < hR\{F(xy)\}_\sigma, \\ \left\{\dfrac{\partial v}{\partial y}\right\}_\sigma < hR\{F(xy)\}_\sigma, \\ \left\{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}_\sigma < h\{F(xy)\}_\sigma, \quad \left\{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right\}_\sigma < h\{F(xy)\}_\sigma, \quad \left\{\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}_\sigma < h\{F(xy)\}_\sigma, \end{array}$$

où h est un nombre fixe.

§ 3.

4. Nous pouvons passer à présent à la démonstration du théorème de M. Hilbert

Théorème: *Soit z une solution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre*

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, z, x, y\right) = 0. \tag{12}$$

Si, F étant analytique, z a dans une certaine région S ses dérivées des trois premiers ordres finies et continues et que de plus elle vérifie l'inégalité

$$4\,F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\,F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}\right)^2 > 0, \tag{13}$$

la solution z est analytique dans cette région[5]).

On peut, sans restreindre la généralité, se borner à ne considerer que l'équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right), \tag{14}$$

où

$$f'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} = f'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = f'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}} = 0$$

pour

$$x = y = 0, \quad z = z_0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p_0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q_0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r_0, \tag{15}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s_0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t_0$$

en désignant par z_0, p_0 etc. .... t_0 les valeurs prises à l'origine par la solution z et ses dérivées successives, puisque par un simple changement de variables on peut, en vertu de l'inégalité (13) ramener le cas général de l'équation (12) à celui de l'équation (14)[6]).

Appliquons à l'équation (14) la méthode des approximations successives. Considérons le système:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = f(r_0\, s_0 \ldots z_0\, 0\, 0) = r_0 + t_0 = A,\\
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \ldots, u_0\, x\, y\right),\\
&\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \ldots, u_1\, x\, y\right),\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}, \ldots, u_{n-1}\, x\, y\right),\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{16}$$

[5]) Je remarquerai que la démonstration ne demanderait que certains changements de calcul, si, au lieu d'admettre l'existence des dérivées 3èmes, on supposait seulement que les dérivées secondes satisfont à des conditions de Lipschitz d'ordre $\alpha > \frac{1}{2}$, car elles seraient dans ce cas développables en séries trigonométriques absolument convergentes, d'après un théorème que j'ai démontré (Comptes Rendus, t. 158).

[6]) loc. cit., ch. IV.

Déterminons d'abord u_0 par la condition que $u_0 = z$ sur les circonférences concentriques C et C_1 de rayons R et R_1 $\left(R_1 = \frac{R}{2}\right)$ ayant leurs centres à l'origine. Portons ensuite la valeur de la fonction u_0 ainsi trouvée dans la seconde équation. Cette équation détermine à son tour u_1 par la condition que sur C et C_1 $u_1 = z$, et ainsi de suite. On obtient ainsi une succession infinie de fonctions bien déterminées

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots .$$

On peut aisément s'assurer, que si n croissant indéfiniment, u_n tend uniformément vers une fonction u et les dérivées de u_n des deux premiers ordres par rapport à x et y tendent vers les dérivées respectives de u, u vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots, u, x, y\right),$$

en prenant sur les circonférences C et C_1 les mêmes valeurs que z.

On peut écrire évidemment:

$$u_n = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) + \ldots .$$

Donc pour que u_n tende uniformément vers une fonction u il faut et il suffit que la série

$$u_0 = u_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{17}$$

où $v_n = u_n - u_{n-1}$, converge uniformément. Du système des équations (16) on déduit immédiatement en retranchant chaque équation de la suivante un nouveau système

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = r_0 + t_0 = f(r_0, s_0, \ldots, 0\,0) = A,\\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \ldots, u_0\, x\, y\right) - f(r_0\, s_0 \ldots 0\,0),\\
&\qquad\qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\\
&\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}, \ldots, u_{n-1}\, x\, y\right) - f\left(\frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial x^2}, \ldots, u_{n-2}\, x\, y\right),\\
&\qquad\qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned} \tag{18}$$

qui détermine directement $u_0, v_1, \ldots v_n \ldots$, en supposant que sur C et C_1, $u_0 = z$ et $v_n = 0$. Nous voulons démontrer que la série (17) ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres convergent et représentent des fonctions analytiques de ϱ $(\varrho = \sqrt{x^2 + y^2})$ dans une certaine région σ du plan de la variable complexe ϱ, si u_0 et v_n verifient les équations (18) et $u_0 = z$, $v_n = 0$ sur C et C_1. Rappelons d'abord[7]) quelques conséquences, qui résultent de l'hypothèse que z et ses dérivées des trois premiers ordres

[7]) loc. cit., ch. III.

sont inférieures à un nombre fixe M à l'intérieur d'un cercle de rayon $R<1$. La fonction z sera développable en série trigonométrique absolument convergente sur un cercle de rayon R

$$z=z_0+\frac{R^2}{4}(r_0+t_0)+R^3c_0+(Rp_0+R^3c_1)\cos\theta+(Rq_0+R^3d_1)\sin\theta$$
$$+\left(R^2\frac{r_0-t_0}{4}+R^3c_2\right)\cos 2\theta+\left(\frac{R^2c_0}{2}+R^3d_2\right)\sin 2\theta$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}R^3(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta$$

et sur un cercle de rayon $R_1=\frac{R}{2}$

$$z=z_0+\frac{R_1^2}{4}(r_0+t_0)+R_1^3c_0+(R_1p_0+R_1^3c_0)\cos\theta+(R_1q_0+R_1^3d_1)\sin\theta$$
$$+\left(R_1^2\frac{r_0-t_0}{4}+R_1^3c_2\right)\cos 2a+\left(\frac{R_1^2c_0}{2}+R_1^3d_2\right)\sin 2\theta$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}R_1^3(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)=\alpha_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n'\cos n\theta+\beta_n'\sin n\theta,$$

où c_n, d_n sont des fonctions bornées de ϱ pour $\varrho\leqq R$, de sorte que α_n et α_n' (pour $n=0,1,2$) satisfont aux égalités

$$\alpha_0'-\alpha_0+\frac{A}{4}(R^2-R_1^2)=R^3C, \tag{19}$$

$$\beta_1-2\beta_1'=R^3K_1,\qquad \alpha_1-2\alpha_1'=R^3K, \tag{20}$$

$$\beta_2-4\beta_2'=R^3m_1,\qquad \alpha_2-4\alpha_2'=R^3m, \tag{21}$$

où C, K, K, m, m sont bornés (lorsque M est donné). On a de plus les inégalités:

$$|\alpha_0-z_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|+|\beta_n|<hR,$$
$$\left|\frac{\alpha_1}{R}-p_0\right|+\left|\frac{\beta_1}{R}-q_0\right|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{R}\{|\alpha_n|+|\beta_n|\}<hR,$$
$$\left|\frac{4\alpha_2}{R^2}-(r_0-t_0)\right|+\left|\frac{4\beta_2}{R^2}-2s_0\right|+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{R^2}\{|\alpha_n|+|\beta_n|\}<hR,$$
$$|\alpha_0'-z_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n'|+|\beta_n'|<hR, \tag{22}$$
$$\left|\frac{\alpha_1'}{R_1}-p_0\right|+\left|\frac{\beta_1}{R_1}-q_0\right|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{R_1}\{|\alpha_n|+|\beta_n|\}<hR,$$
$$\left|\frac{4\alpha_2'}{R_1^2}-(r_0-t_0)\right|+\left|\frac{4\beta_2'}{R_1^2}-2s_0\right|+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{R_1^2}\{|\alpha_n'|+|\beta_n'|\}<hR$$

où h est également un nombre fixe, qui ne dépend que de M.

Ainsi, par hypothèse, sur le cercle C de rayon R

$$z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta,$$

où α_n, β_n vérifient (19), (20), (21) et (22), et

$$z = \alpha_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n' \cos n\theta + \beta_n' \sin n\theta$$

sur le cercle C_1 de rayon $R_1 < R$ $\left(R_1 = \frac{R}{2}\right)$, où α_n', β_n' vérifient aussi les égalités (19), (20), (21) et les inégalités (22).

5. La solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = f(r_0 s_0 \dots 00) = r_0 + t_0 = A$$

qui sur C et C_1 se confond avec z est, comme il est facile de voir, de la forme

$$u_0 = \frac{A}{4}(\varrho^2 - R^2) + \alpha_0 + \left(\alpha_0' - \alpha_0 + \frac{A}{4}(R^2 - R_1^2)\right) \frac{\lg \frac{\varrho}{R}}{\lg \frac{R_1}{R}}$$

$$(23) \qquad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n}} \left\{ \frac{\varrho^n}{R^n} \left[\left(\alpha_n - \alpha_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right) \cos n\theta + \left(\beta_n - \beta_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right) \sin n\theta \right] \right.$$

$$\left. + \frac{R_1^n}{\varrho^n} \left[\left(\alpha_n' - \alpha_n \frac{R_1^n}{R^n}\right) \cos n\theta + \left(\beta_n' - \beta_n \frac{R_1^n}{R^n}\right) \sin n\theta \right] \right\},$$

et ses dérivées

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \left\{ \frac{A\varrho}{2} + \left[\alpha_0' - \alpha_0 + \frac{A}{4}\left(R^2 - R_1^2\right)\right] \frac{1}{\varrho \lg \frac{R_1}{R}} \right\} \cos\theta$$

$$+ \frac{1}{1 - \frac{R_1^2}{R^2}} \cdot \frac{1}{R} \left(\alpha_1 - \alpha_1' \frac{R_1}{R}\right) - \frac{1}{1 - \frac{R_1^2}{R^2}} \cdot \frac{R_1}{\varrho^2} \left[\left(\alpha_1' - \alpha_1 \frac{R_1}{R}\right) \cos 2\theta + \left(\beta_1' - \beta_1 \frac{R_1}{R}\right) \sin 2\theta \right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n}} \left\{ \frac{n\varrho^{n-1}}{R^n} \left[\left(\alpha_n - \alpha_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right) \cos(n-1)\theta + \left(\beta_n - \beta_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right) \sin(n-1)\theta \right] \right.$$

$$\left. - \frac{n R_1^n}{\varrho^{n+1}} \left[\left(\alpha_n' - \alpha_n \frac{R_1^n}{R^n}\right) \cos(n+1)\theta + \left(\beta_n' - \beta_n \frac{R_1^n}{R^n}\right) \sin(n+1)\theta \right] \right\},$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{A}{2} - \left[\left(\alpha_0' - \alpha_0 + \frac{A}{4}(R^2 - R_1^2)\right)\right] \frac{\cos 2\theta}{\varrho^2 \lg \frac{R_1}{R}}$$

$$+ \frac{2}{1-\frac{R_1^2}{R^2}} \cdot \frac{R_1}{\varrho^3} \left[\left(\alpha_1' - \alpha_1 \frac{R_1}{R}\right)\cos 3\theta + \left(\beta_1' - \beta_1 \frac{R_1}{R}\right)\sin 3\theta\right]$$

$$+ \frac{1}{1-\frac{R_1^4}{R^4}} \cdot \frac{2}{R^2}\left(\alpha_2 - \alpha_2' \frac{R_1^2}{R^2}\right) + \frac{1}{1-\frac{R_1^4}{R^4}} \cdot \frac{6R_1^2}{\varrho^4}\left[\left(\alpha_2' - \alpha_2 \frac{R_1^2}{R^2}\right)\cos 4\theta + \left(\beta_2' - \beta_2 \frac{R_1^2}{R^2}\right)\sin 4\theta\right]$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n}} \left\{\frac{n(n-1)\varrho^{n-2}}{R^n}\left[\left(\alpha_n - \alpha_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos(n-2)\theta + \left(\beta_n - \beta_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin(n-2)\theta\right]\right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)R_1^n}{\varrho^{n+2}}\left[\left(\alpha_n' - \alpha_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos(n+2)\theta + \left(\beta_n - \beta_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin(n+2)\theta\right]\right\}.$$

On a des expressions analogues pour $\frac{\partial u_0}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}$, et il est aisé, en tenant compte de (19), (20), (21) et (22), de s'assurer que:

(24)

(a) $\left\{u_0 - z_0\right\}_\sigma < HR,$

(b) $\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right\}_\sigma < HR,$

(c) $\left\{\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right\}_\sigma < HR,$

(d) $\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0\right\}_\sigma < HR,$

(k) $\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - s_0\right\}_\sigma < HR,$

(l) $\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right\}_\sigma < HR,$

où H est un nombre fixe, qui ne dépend que de M. En effet, grâce aux inégalités (22) et à l'égalité (19), on tire de (23) l'inégalité (a).

Etablissons ensuite l'inégalité (b); on a

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0 = \left\{\frac{A\varrho}{2} + \left[\alpha_0' - \alpha_0 + \frac{A}{4}\left(R^2 - R_1^2\right)\right] \frac{1}{\varrho \lg \frac{R_1}{R}}\right\} \cos\theta + \frac{\alpha_1}{R} - p_0$$

$$+ \frac{1}{3R}\left(\alpha_1 - 2\alpha_1'\right) - \frac{4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{R_1}{\varrho^2}\left[\left((2\alpha_1' - \alpha_1)\cos 2\theta + (2\beta_1' - \beta_1)\right)\sin 2\theta\right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^{2n}}} \left\{\frac{n\varrho^{n-1}}{R^n}\left[\left(\alpha_n - \alpha_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos(n-1)\theta + \left(\beta_n - \beta_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin(n-1)\theta\right]\right.$$

$$\left. - \frac{nR_1^n}{\varrho^{n+1}}\left[\left(\alpha_n' - \alpha_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos(n+1)\theta + \left(\beta_n' - \beta_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin(n-1)\theta\right]\right\},$$

en rappelant que $R_1 = \frac{R}{2}$.

Puisque R_1 est le module minimum de ϱ et R — son module maximum, nous avons donc

$$\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}-p_0\right\}_\sigma < \left|\frac{A}{2}\right| R+\left[\left|\alpha_0'-\alpha_0\right|+\frac{A}{4}(R^2-R_1^2)\right]\frac{1}{R_1\left|\lg\frac{R_1}{R}\right|}$$

$$+\frac{1}{3R}|\alpha_1-2\alpha_1'|+\frac{4}{3\cdot 2R_1}\{|2\alpha_1'-\alpha_1|+|2\beta_1'-\beta_1|\}$$

$$+\left|\frac{\alpha_1}{R}-p_0\right|+\sum_{n=2}^{\infty}2\frac{n}{R}\{|\alpha_n|+|\beta_n|\}+\sum_{n=2}^{\infty}3\frac{n}{R}\{|\alpha_n'|+|\beta_n'|\}.$$

En appliquant successivement les égalités (19), (20) et les inégalités (22) on tire l'inégalité (b).

Nous pouvons obtenir de même l'inégalité (c). Passons à l'inégalité (d). D'après (23bis), nous avons

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-r_0=-\left[(\alpha_0'-\alpha_0)+\frac{A}{4}(R^2-R_1^2)\right]\frac{\cos 2\theta}{\varrho^2\lg\frac{R_1}{R}}$$

$$+\frac{2\cdot 4}{3}\cdot\frac{R_1}{2\varrho^3}[(2\alpha_1'-\alpha_1)\cos 3\theta+(2\beta_1'-\beta_1)\sin 3\theta]$$

$$+\frac{2}{15R^2}(\alpha_2-4\alpha_2')+\frac{1}{2}\left(\frac{4\alpha_2}{R^2}-r_0+t_0\right)$$

$$+\frac{16}{15}\cdot\frac{6R_1^2}{4\cdot\varrho^4}[(4\alpha_2'-\alpha_2)\cos 4\theta+(4\beta_2'-\beta_2)\sin 4\theta]$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{R_1^{2n}}{R^{2n}}}\left\{\frac{n(n-1)\varrho^{n-2}}{R^n}\cdot\left[\left(\alpha_n-\alpha_n'\frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos(n-2)\theta+\left(\beta_n-\beta_n'\frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin(n-2)\theta\right]\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)R_1^n}{\varrho^{n+2}}\left[\left(\alpha_n'-\alpha_n\frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos(n+2)\theta+\left(\beta_n'-\beta_n\frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin(n+2)\theta\right]\right\},$$

puisque $A=r_0+t_0$.

Par conséquent,

$$\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-r_0\right\}_\sigma < \left|\alpha_0'-\alpha_0+\frac{A}{4}(R^2-R_1^2)\right|\frac{1}{R_1^2\left|\lg\frac{R_1}{R}\right|}$$

$$+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{R_1^2}\left[(|2\alpha_1'-\alpha_1|+|2\beta_1'-\beta_1|)+\frac{2}{15R^2}|\alpha_2-4\alpha_2'|\right.$$

$$\left.+\frac{16}{15}\cdot\frac{6}{R_1^2}(|4\alpha_2'-\alpha_2|+|4\beta_2'-\beta_2|)\right]$$

$$+\left|\frac{4\alpha_2}{R^2}-r_0+t_0\right|+2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{R^2}|\alpha_n|+|\beta_n|+5\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{R^2}|\alpha_n'|+|\beta_n'|.$$

En appliquant successivement les égalités (19), (20), (21) et les inégalités (22) nous obtenons l'inégalité (d).

On peut établir de même les inégalités (k) et (l).

6. Toutes les autres équations du système (18) sont de la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(x, y).$$

Prenons la seconde des équations du système (18)

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}, \ldots, u_0\, x\, y\right) - f(r_0 s_0 \ldots z_0\, 0\, 0) = F_0(x, y).$$

Posons

$$u_0 - z_0 = a_1, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0 = b_1, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0 = c_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0 = a_0, \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - s_0 = b_0, \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0 = c_0.$$

En développant, nous avons

$$F_0(x, y) = A_0 a_0 + B_0 b_0 + C_0 c_0 + D_0 b_1 + E_0 c_1 + G_0 a_1 + H_0 x + J_0 y,$$

où $(0 < \theta < 1)$

$$A_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0, \ldots, z_0 + \theta a_1, \theta x, \theta y),$$

$$B_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(r_0 + \theta a_0, s_0 + \theta b_0, \ldots, z_0 + \theta a_1, \theta x, \theta y),$$

$$C_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(r_0 + \theta a_0, s_0 + \theta b_0, \ldots, z_0 + \theta a_1, \theta x, \theta y), \text{ etc.;}$$

A_0, B_0, C_0 etc. sont développables en séries de Taylor suivant les puissances de $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, x$ et y. En vertu de (1) et des inégalités (24), nous avons

$$\{A_0\}_\sigma < \overset{+}{f}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^3}}(HR, HR, \ldots, R, R),$$

$$\{B_0\}_\sigma < \overset{+}{f}_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(HR, HR, \ldots, R, R),$$

$$\{C_0\}_\sigma < \overset{+}{f}_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(HR, HR, \ldots, R, R).$$

En prenant R suffisamment petit, en vertu des égalités (15), nous obtenons

$$\{A_0\}_\sigma < \varepsilon, \quad \{B_0\}_\sigma < \varepsilon, \quad \{C_0\}_\sigma < \varepsilon,$$

où ε est un nombre aussi petit que l'on veut. En outre, nous avons

$$\{D_0\}_\sigma < P, \quad \{E_0\}_\sigma < P, \quad \{G_0\}_\sigma < P, \quad \{H_0\}_\sigma < P, \quad \{J_0\}_\sigma < P,$$

où P est un nombre fini.

Par conséquent

$$\{F_0\}_\sigma < 3(P+\varepsilon)HR + 2PR = \mu.$$

Donc, en vertu des inégalités (11), on obtient

$$\{v_1\}_\sigma < hR^2\mu, \qquad \left\{\frac{\partial v_1}{\partial x}\right\}_\sigma < hR\mu, \qquad \left\{\frac{\partial v_1}{\partial y}\right\} < hR\mu,$$

$$\left\{\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right\}_\sigma < h\mu, \qquad \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right\}_\sigma < h\mu, \qquad \left\{\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right\}_\sigma < h\mu.$$

En désignant le second membre de la $(n+2)^{\text{me}}$ équation du système (18) par F_n, démontrons qu'on peut prendre R, indépendent de n, suffisamment petit pour que

$$\{F_n\}_\sigma < \frac{\mu}{2^n}.$$

Supposons cette inégalité légitime pour $n-1$. Etablissons qu'elle sera aussi exacte pour n. Nous avons

$$\{F_0\}_\sigma < \mu, \quad \{F_1\}_\sigma < \frac{\mu}{2}, \ \ldots, \{F_{n-1}\}_\sigma < \frac{\mu}{2^{n-1}}.$$

Donc, en vertu des inégalités (11),

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\{v_i\}_\sigma < \frac{h\mu R^2}{2^{i-1}}, \qquad \left\{\frac{\partial v_i}{\partial x}\right\}_\sigma < \frac{h\mu R}{2^{i-1}}, \qquad \left\{\frac{\partial v_i}{\partial y}\right\}_\sigma < \frac{h\mu R}{2^{i-1}}, \\ &\left\{\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}\right\} < \frac{h\mu}{2^{i-1}}, \qquad \left\{\frac{\partial^2 v_i}{\partial x\,\partial y}\right\}_\sigma < \frac{h\mu}{2^{i-1}}, \qquad \left\{\frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}\right\}_\sigma < \frac{h\mu}{2^{i-1}} \end{aligned}$$

pour tous les i de 1 ... à n.

En développant F_n, on obtient

$$F_n = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}A_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial y}B_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}C_n + \frac{\partial v_n}{\partial x}D_n + \frac{\partial v_n}{\partial y}E_n + v_nG_n,$$

où

$$A_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \ \ldots, u_{n-1} + \theta v_n\right),$$

$$B_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \ \ldots, u_{n-1} + \theta v_n\right),$$

$$C_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x\,r} + \theta\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,r}, \ \ldots, u_{n-1} + \theta v_n\right), \text{ etc.,}$$

A_n, B_n et C_n sont développables en série de Taylor suivant les puissances de $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - r_0$, $\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} - r_0$, ... etc. symmétriques par rapport aux indices n et $n-1$.

Ensuite, puisque

$$u_n = u_0 + v_1 + \ldots + v_n,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x},$$

etc.,

en vertu des inégalités (24) et (25), on a

$$\{u_n - z_0\}_\sigma < 2h\mu + HR,$$

$$\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0\right\}_\sigma < 2h\mu + HR,$$

. . . . . .

$$\left\{\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - t_0\right\}_\sigma < 2h\mu + HR.$$

Or on peut faire μ aussi petit que l'on veut, en diminuant R; donc, grâce à (1) et (15), nous avons:

$$\{A_n\}_\sigma < \varepsilon, \quad \{B_n\}_\sigma < \varepsilon, \quad \{C_n\}_\sigma < \varepsilon, \quad \{D_n\}_\sigma < P, \quad \{E_n\}_\sigma < P, \quad \{G_n\}_\sigma < P,$$

où ε est un nombre aussi petit que l'on veut et P un nombre fini, deux nombres, qui, évidemment, peuvent être supposés identiques à ceux que nous avons introduits plus haut. Par conséquent

$$\{F_n\}_\sigma < \frac{h\mu}{2^{n-1}}(3\varepsilon + 3RP).$$

Si R est suffisamment petit, on a

$$h(3\varepsilon + 3PR) < \frac{1}{2},$$

et nous obtenons, ce qu'il fallait démontrer:

$$\{F_n\}_\sigma < \frac{\mu}{2^n}.$$

Donc les séries

$$(26) \qquad \begin{cases} \{u_0\}_\sigma + \{v_1\}_\sigma + \ldots \\ \left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\}_\sigma + \left\{\frac{\partial v_1}{\partial x}\right\}_\sigma + \ldots \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right\}_\sigma + \left\{\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right\}_\sigma + \ldots \end{cases}$$

convergent uniformément. Il en résulte que la fonction u est analytique par rapport à ϱ dans la région σ.

§ 4.

7. Etablissons maintenant que la solution trouvée[8])

$$u \equiv z.$$

Prenons les deux équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, z, x, y\right),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots, u, x, y\right).$$

En rentranchant la première de la seconde et désignant $u - z = t$, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = A\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + B\frac{\partial t}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + D\frac{\partial t}{\partial x} + E\frac{\partial t}{\partial y} + Ft = \Phi,$$

où

$$A = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \ldots, u + \theta t, xy\right),$$
$$B = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \ldots, u + \theta t, xy\right),$$
$$C = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \ldots, u + \theta t, xy\right).$$

$f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$, $f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}$, $f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ sont développables en séries de Taylor suivant les puissances de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r_0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - s_0, \quad \ldots, \quad u - z_0.$$
$$\frac{\partial z}{\partial x^2} - r_0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - s_0, \quad \ldots, \quad z - z_0.$$

En vertu de l'inégalité 1$^{\text{bis}}$,

$$\{A\}_{R_1 R} \leqq \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r_0\right\}_{R_1 R}, \ldots, \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - r_0\right\}_{R_1 R}, \ldots\right),$$
$$\{B\}_{R_1 R} \leqq \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}\left(\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r_0\right\}_{R_1 R}, \ldots, \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - r_0\right\}_{R_1 R}, \ldots\right),$$
$$\{C\}_{R_1 R} \leqq \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\left(\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r_0\right\}_{R_1 R}, \ldots, \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - r_0\right\}_{R_1 R}, \ldots\right).$$

[8]) Cette identité peut être démontrée par une autre méthode que j'ai employée dans mon article „Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles", Mathem. Annalen **96**, page 643, et qui a l'avantage de ne pas exiger l'existance des dérivées 3èmes de z.

En vertu de la continuité de z et de ses dérivées des 3 premiers ordres, on peut prendre R suffisamment petit pour que

$$\{z - z_0\}_{R_1 R} < \lambda, \quad \ldots, \quad \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - t_0\right\}_{R_1 R} < \lambda,$$

où λ est un nombre aussi petit que l'on veut[9]).

Nous avons d'autre part, d'après ce qui précède,

$$\{u - z_0\}_{R_1 R} \leqq \{u - z_0\}_{\sigma} < \lambda,$$

. . . . . .

$$\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right\}_{R_1 R} \leqq \left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right\}_{\sigma} < \lambda.$$

Par conséquent, si R a été pris suffisamment petit,

$$\{A\}_{R_1 R} < \varepsilon, \qquad \{B\}_{R_1 R} < \varepsilon, \qquad \{C\}_{R_1 R} < \varepsilon,$$

$$\{D\}_{R_1 R} < P, \qquad \{E\}_{R_1 R} < P, \qquad \{F\}_{R_1 R} < P,$$

où ε est un nombre aussi petit que l'on veut et P un nombre fini.

Les modules trigonométriques de $t, \frac{\partial t}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ sont, évidemment, de même finis. Soit M le plus grand des modules trigonométriques de $\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, t$ et M_1 le plus grand des nombres $\left\{\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right\}_{R_1 R}, \left\{\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}\right\}_{R_1 R}, \left\{\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right\}_{R_1 R}$.

Nous aurons

$$\{\Phi\}_{R_1 R} \leqq 3(\varepsilon M_1 + P M).$$

Puisque t s'annulle sur C et C_1, en vertu des inégalités (11) (qui subsistent, lorsque le losange σ se réduit à sa diagonale $R_1 R$), on a

$$(\xi) \quad M_1 < 3(\varepsilon M_1 + P M) h,$$

$$(\eta) \quad M < 3 R(\varepsilon M_1 + P M) h,$$

où h est un nombre fini.

Donc, en prenant R assez petit pour que

$$3 R h P < \frac{1}{2},$$

on aurait, en vertu de l'inégalité (η),

$$M < 6 R M_1 \varepsilon h.$$

Alors, à cause de l'inégalité (ξ), nous obtenons

$$M_1 < 6 \varepsilon M_1 h,$$

[9]) Ces inégalités s'établissent immédiatement, lorsqu'on admet que les dérivées 3èmes sont à variation bornée. Sans cette restriction (ou une autre analogue), il semble nécessaire d'utiliser le fait que z est une solution de l'équation (12) de type elliptique, ce qui compliquerait beaucoup la démonstration.

d'où

$$M_1 = M = 0.$$

Par conséquent, si R a été choisi assez petit, on a, dans toute la région limitée par C et C_1, $t \equiv 0$, ou $z \equiv u$.

8. Ainsi, en déplaçant arbitrairement le centre de l'anneau CC_1, on pourra balayer toute la région S, en retrouvant z par la méthode indiquée; donc, $P(x_0, y_0)$ étant un point arbitraire d'une région donnée S_1 intérieure à S, il existera, d'après ce qui précède, deux nombres: α et M, les mêmes pour toute l'aire S_1, tels que $|z| < M$, lorsque $x = x_0$ et en même temps $|y - y_0| < \alpha$, et aussi, lorsque $y = y_0$ et $|x - x_0| < \alpha$. Par conséquent, d'après le théorème 67 (p. 101) du Mémoire[10]) «Sur l'ordre de la meilleure approximation etc.», la fonction z sera analytique par rapport à l'ensemble des deux variables x, y en chaque point $P(x_0, y_0)$ de la région S_1.

[10]) S. Bernstein, Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique 1912.

(Eingegangen am 19. Juli 1926.)

Beweis eines Satzes des Herrn H. Kneser über die Gesamtheit der Lösungen, die ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen durch einen Punkt schickt.

Von

Max Müller in Heidelberg.

Sind die Funktionen $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in dem durch die Ungleichungen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \qquad |y_i - y_{i0}| \leqq b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereich $\mathfrak{B}$ stetig, ist

$$M = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{B}} \{|f_1|, \ldots, |f_n|\},$$

$$a' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

so hat bekanntlich im Intervall $\langle x_0, x_0 + a'\rangle$ das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

mindestens ein System stetiger Integrale $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ mit den Anfangswerten $y_i(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Im allgemeinen wird es aber mehr als ein solches Integralsystem geben. Ist $x_0 < c \leqq a'$, so wird also die Menge $\mathfrak{M}(c)$ aller durch solche Integralsysteme erzeugten Zahlensysteme $\{y_1(c), \ldots, y_n(c)\}$ nach dem Existenzsatz mindestens ein, im allgemeinen aber mehr als ein Element enthalten. Schon Herr G. Peano hat bewiesen, daß $\mathfrak{M}(c)$ abgeschlossen ist, und Herr H. Kneser hat hinzugefügt:

$\mathfrak{M}(c)$ ist ein Kontinuum im $(y_1, \ldots, y_n)$-Raume[1]).

[1]) H. Kneser, Über die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, das der Lipschitzschen Bedingung nicht genügt. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Kl., 1923, S. 171—174.

Beim Beweis dieses Satzes verwendet Herr H. Kneser die Methode der ausgewählten Polygonzüge; während man aber bei dem bekannten Beweis für die Existenz der Integrale mit *geradlinigen* Polygonen auskommt, muß Herr H. Kneser hier *Parabel*polygone heranziehen, die ursprüngliche Methode also erweitern. In dieser Note beweise ich den Satz mittels der Methode der approximativen Polynome; hierbei ist lediglich eine geeignete Auswahl der die Funktionen f_i approximierenden Polynome erforderlich.

1. Ist $b' = \mathrm{Max}(b, (M+1)a)$, so setzen wir die Funktionen f_i in den durch die Ungleichungen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a', \qquad |y_i - y_{i0}| \leqq b' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereich $\mathfrak{B}'$ fort, indem wir definieren: Ist $(x, y_1, \ldots, y_n) \prec \mathfrak{B}'$, so sei

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = f_i(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{x} = x, & & \\ \bar{y}_i = y_i, & \text{falls} & y_{i0} - b \leqq y_i \leqq y_{i0} + b \\ \bar{y}_i = y_{i0} + b, & \text{falls} & y_i > y_{i0} + b, \\ \bar{y}_i = y_{i0} - b, & \text{falls} & y_i < y_{i0} - b \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist

$$M \geqq \operatorname*{Max}_{\mathfrak{B}'} \{|f_1|, \ldots, |f_n|\}.$$

2. Es sei $\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)$ irgendein Integralsystem von (1) mit den Anfangswerten $\bar{y}_i(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ferner ε eine beliebige positive Zahl < 1. Dann gibt es ein System von ganzen rationalen Funktionen in $y_1, \ldots, y_n$

$$\bar{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{0, \ldots, \sigma} r^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)\, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit im Intervall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ stetigen Koeffizienten $r^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)$ und mit folgenden Eigenschaften:

a) Es ist in $\mathfrak{B}'$

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - \bar{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

b) für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a'$ ist

$$\frac{d\bar{y}_i(x)}{dx} = \bar{g}_i(x, \bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Zu einem solchen System kommen wir folgendermaßen: Nach einem bekannten, von Weierstraß herrührenden Satz gibt es ein System von

ganzen rationalen Funktionen in $y_1, \ldots, y_n$

$$(2) \qquad g_i^*(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{0, \ldots, \sigma} \varrho^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)\, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit im Intervall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ stetigen Koeffizienten $\varrho^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)$, so daß für $(x, y_1, \ldots, y_n) \prec \mathfrak{B}'$

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - g_i^*(x, y_1, \ldots, y_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Funktionen (2) können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$g_i^*(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{0, \ldots, \sigma} R^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)[y_1 - \bar{y}_1(x)]^{\nu_1} \ldots [y_n - \bar{y}_n(x)]^{\nu_n}$$

$$= R^{(i)}_{0, \ldots, 0}(x) + \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{0, \ldots, \sigma\,\prime} R^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)[y_1 - \bar{y}_1(x)]^{\nu_1} \ldots [y_n - \bar{y}_n(x)]^{\nu_n}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n);$$

dabei lassen sich die Koeffizienten $R^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)$ eindeutig als stetige Funktionen von x aus den Koeffizienten $\varrho^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)$ berechnen und umgekehrt. Der Strich am letzten Summenzeichen bedeutet, daß bei der Summation stets $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n \geqq 1$ sein soll. Dann haben die Funktionen

$$\bar{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \bar{y}_i'(x) + \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{0, \ldots, \sigma\,\prime} R^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}[y_1 - \bar{y}_1(x)]^{\nu_1} \ldots [y_n - \bar{y}_n(x)]^{\nu_n}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

die verlangten Eigenschaften. Unmittelbar ist zu sehen, daß

$$\bar{g}_i(x, \bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)) = \bar{y}_i'(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

also ist b) erfüllt. Ferner ist für $(x, y_1, \ldots, y_n) \prec \mathfrak{B}'$

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - \bar{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n)|$$

$$\leqq |f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - g_i^*(x, y_1, \ldots, y_n)|$$

$$+ |g_i^*(x, y_1, \ldots, y_n) - \bar{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + |R^{(i)}_{0, \ldots, 0}(x) - \bar{y}_i'(x)|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + |g_i^*(x, \bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)) - f_i(x, \bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also auch a) erfüllt.

3. Wäre die Menge $\mathfrak{M}(c)$ kein Kontinuum, so zerfiele sie in zwei elementenfremde abgeschlossene Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ mit positivem Abstand d. Wir definieren jetzt eine stetige Funktion

$$F(P) = F(y_1(c), y_2(c), \ldots, y_n(c))$$

durch die Gleichung

$$F(P) = (P\mathfrak{M}_1) - (P\mathfrak{M}_2),$$

worin die Klammern den kürzesten Abstand des Punktes P mit den Koordinaten $y_1, \ldots, y_n$ von den Punkten der Menge $\mathfrak{M}_1$, bzw. $\mathfrak{M}_2$ bedeuten. Es ist

$$F(P) = (P\mathfrak{M}_1) \geqq d \qquad \text{für} \quad P \prec \mathfrak{M}_2,$$
$$F(P) = -(P\mathfrak{M}_2) \leqq -d \quad \text{für} \quad P \prec \mathfrak{M}_1,$$

also ist $F(P)$ auf $\mathfrak{M}(c)$ von Null verschieden[2]).

4. Wir behaupten: Ist $0 < \varepsilon < 1$, so gibt es ein Funktionensystem

$$G_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{0, \ldots, \sigma} R^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)\, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit im Intervall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ stetigen Koeffizienten $R^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)$, das folgende Eigenschaften besitzt:

A) Es ist in $\mathfrak{B}'$

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - G_i(x, y_1, \ldots, y_n)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

B) Ist $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ dasjenige Integralsystem des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dy_i}{dx} = G_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

das die Anfangswerte $Y_i(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ hat, so ist

$$F(Y_1(c), \ldots, Y_n(c)) = 0.$$

Beweis: Es gibt mindestens ein Integralsystem $\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)$ von (1) mit den Anfangswerten $\bar{y}_i(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ derart, daß $\{\bar{y}_1(c), \ldots, \bar{y}_n(c)\} \prec \mathfrak{M}_1$, also

$$F(\bar{y}_1(c), \ldots, \bar{y}_n(c)) \leqq -d,$$

und mindestens ein Integralsystem $\tilde{y}_1(x), \ldots, \tilde{y}_n(x)$ von (1) mit denselben Anfangswerten derart, daß $\{\tilde{y}_1(c), \ldots, \tilde{y}_n(c)\} \prec \mathfrak{M}_2$, also

$$F(\tilde{y}_1(c), \ldots, \tilde{y}_n(c)) \geqq d.$$

Nach Nr. 2 gibt es dann ein System von Funktionen

$$\bar{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{0, \ldots, \sigma} \bar{r}^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)\, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

derart, daß a) in $\mathfrak{B}'$

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - \bar{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

b) für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a'$

$$\frac{d\bar{y}_i(x)}{dx} = \bar{g}_i(x, \bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

[2]) Den Gedanken, eine solche Funktion F einzuführen, entnehme ich der Arbeit des Herrn H. Kneser.

und ein System von Funktionen

$$\tilde{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{0, \ldots, \sigma} \tilde{r}^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)\, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

derart, daß a) in $\mathfrak{B}'$

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - \tilde{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

b) für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a'$

$$\frac{d\tilde{y}_i(x)}{dx} = \tilde{g}_i(x, \tilde{y}_1(x), \ldots, \tilde{y}_n(x)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Die ganzen rationalen Funktionen in $y_1, \ldots, y_n$

$$g_i(x, y_1, \ldots, y_n; \vartheta) = \vartheta \bar{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n) + (1 - \vartheta)\tilde{g}_i(x, y_1, \ldots, y_n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

erfüllen alle die Bedingung A), denn es ist für $(x, y_1, \ldots, y_n) < \mathfrak{B}'$

$$|f_i - g_i| = |f_i - \tilde{g}_i + \vartheta(\tilde{g}_i - \bar{g}_i)| \leqq |f_i - \tilde{g}_i| + |\tilde{g}_i - \bar{g}_i|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + |\tilde{g}_i - f_i| + |f_i - \bar{g}_i| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1).$$

Da hiernach für $(x, y_1, \ldots, y_n) < \mathfrak{B}'$

$$|g_i(x, y_1, \ldots, y_n; \vartheta)| \leqq M + \varepsilon \leqq M + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1),$$

so hat das Differentialgleichungssystem

$$y_i' = g_i(x, y_1, \ldots, y_n; \vartheta) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

im Intervall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ ein in *stetiger* Weise[3]) von dem Parameter ϑ abhängendes Integralsystem $y_1(x; \vartheta), \ldots, y_n(x; \vartheta)$ mit den Anfangswerten $y_i(x_0; \vartheta) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Inbesondere hängt das Wertesystem $\{y_1(c; \vartheta), \ldots, y_n(c; \vartheta)\}$ und damit auch

$$F(y_1(c; \vartheta), \ldots, y_n(c; \vartheta)) = \Phi(\vartheta)$$

stetig von ϑ ab. Für $\vartheta = 0$ ist aber $g_i = \tilde{g}_i$, also

$$y_i(x; 0) = \tilde{y}_i(x),$$
$$\Phi(0) \geqq d > 0,$$

und für $\vartheta = 1$ ist $g_i = \bar{g}_i$, also

$$y_i(x; 1) = \bar{y}_i(x),$$
$$\Phi(1) \leqq -d < 0.$$

---

[3]) Vgl. etwa: L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, Berlin (Julius Springer), 1923, S. 34 ff.

Daher muß es auch einen Wert $\vartheta = \vartheta_0$ zwischen 0 und 1 und ein zugehöriges Integralsystem $Y_i(x) = y_i(x; \vartheta_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ geben, so daß

$$\Phi(\vartheta_0) = F(Y_1(c), \ldots, Y_n(c)) = 0.$$

Die Funktionen

$$G_i(x, y_1, \ldots, y_n) = g_i(x, y_1, \ldots, y_n; \vartheta_0) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n}^{0, \ldots, \sigma} R^{(i)}_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x)\, y_1^{\nu_1} \ldots y_n^{\nu_n}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Koeffizienten

$$R^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x) = \vartheta_0 \bar{r}^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x) + (1 - \vartheta_0)\, \tilde{r}^{(i)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x)$$

erfüllen dann auch die Forderung B)[4]).

5. Es sei

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_\lambda > \varepsilon_{\lambda+1} > \ldots,$$
$$\lim_{\lambda \to \infty} \varepsilon_\lambda = 0.$$

Dann gibt es nach Nr. 4 zu jedem ε_λ ein System von in $\mathfrak{B}'$ stetigen Funktionen $G_i^{(\lambda)}(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mit folgenden Eigenschaften:

A) Für $(x, y_1, \ldots, y_n) < \mathfrak{B}'$ ist

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - G_i^{(\lambda)}(x, y_1, \ldots, y_n)| < \varepsilon_\lambda \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

B) das Integralsystem $Y_1^{(\lambda)}(x), \ldots, Y_n^{(\lambda)}(x)$ des Differentialgleichungssystems

$$y_i' = G_i^{(\lambda)}(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

das die Anfangswerte $Y_i^{(\lambda)}(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ hat, genügt der Bedingung

$$F(Y_1^{(\lambda)}(c), \ldots, Y_n^{(\lambda)}(c)) = 0. \tag{3}$$

Da

$$|G_i^{(\lambda)}(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqq M + \varepsilon_\lambda < M + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

findet man, daß für $x_0 \leqq x_1 \leqq x_0 + a'$, $x_0 \leqq x_2 \leqq x_0 + a'$

$$|Y_i^{(\lambda)}(x_1) - Y_i^{(\lambda)}(x_2)| \leqq (M+1)|x_1 - x_2| \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, \ldots)$$

und für $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a'$

$$y_{i0} - (M+1)(x - x_0) \leqq Y_i^{(\lambda)}(x) \leqq y_{i0} + (M+1)(x - x_0)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Funktionenmengen $\{Y_i^{(\lambda)}(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind demnach im Inter-

[4]) Ursprünglich hatte ich die Funktionen G_i aus den Funktionen $\bar{g}_i$ und $\tilde{g}_i$ durch ein Einschachtelungsverfahren gewonnen; die Anregung zu der viel einfacheren Darstellung des Textes verdanke ich Herrn Prof. Perron.

vall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. Es läßt sich also eine Indexteilfolge $\{\lambda_s\}$ derart finden, daß im Intervall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ die Funktionenfolgen $\{Y_i^{(\lambda_s)}(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gleichmäßig gegen stetige Grenzfunktionen

$$Y_i(x) = \lim_{s \to \infty} Y_i^{(\lambda_s)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

konvergieren. Diese Grenzfunktionen erweisen sich als ein Integralsystem von (1) mit den Anfangswerten $Y_i(x_0) = y_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$[5]. Wegen der Stetigkeit von $F(y_1, \ldots, y_n)$ ergibt sich nach (3), daß

$$F(Y_1(c), \ldots, Y_n(c)) = 0,$$

d. h. F verschwindet doch auf $\mathfrak{M}(c)$ im Widerspruch zu unserer Feststellung in Nr. 3. $\mathfrak{M}(c)$ kann also nicht in zwei elementenfremde Teile zerfallen, sondern muß ein Kontinuum sein.

---

[5]) Vgl. hierzu Kapitel II meiner Arbeit „Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen". Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 619 bis 645.

(Eingegangen am 19. November 1926.)

Bemerkung zum Beweis des Herrn Knopp für die Äquivalenz der Cesàro- und Hölder-Summabilität.

Von

A. F. Andersen in Kopenhagen.

Wir benutzen die üblichen Bezeichnungen für die iterierten Summen einer Zahlenfolge

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots,$$

nämlich

$$S_n^1(s) = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu, \qquad S_n^2(s) = \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^1(s), \qquad \ldots, \qquad S_n^r(s) = \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^{r-1}(s).$$

Die zu (s_n) gehörige Mittelwertfolge, deren Elemente

$$m_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}$$

sind, wird mit M_1, die für die Elemente dieser Folge gebildete Mittelwertfolge mit M_2 usw. bezeichnet. Die zu (s_n) gehörigen Hölderschen Mittel r-ter Ordnung (r positiv und ganz) bilden eben diese Folge M_r. Die zu (s_n) gehörigen Cesàroschen Mittel r-ter Ordnung sind

$$C_n^r(s) = \frac{S_n^r(s)}{\binom{n+r}{n}}.$$

Die Cesàroschen und Hölderschen Mittel beliebiger Ordnung (>1) sind also hinsichtlich ihrer Form so verschieden, daß das Problem der Äquivalenz der beiden Methoden von vornherein als sehr schwierig erscheinen mußte. In der Tat ist diesem Problem, wie bekannt, viel Aufmerksamkeit zuteil geworden, und man hat im Laufe der Zeit zahlreiche Beweise für diese Äquivalenz aufgestellt[1]). K. Knopp, der als erster dies

[1]) W. Schnee, Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertes, Math. Annalen **67** (1909), S. 110—125. — W. B. Ford, On the relation between the Sum-formulas of Hölder and Cesàro, American Journal of Mathematics **32** (1910), S. 315—326.

(Fortsetzung der Fußnote [1]) auf nächster Seite.)

Problem in Angriff genommen hat[2]), hat auch das Verdienst, die wirklich angreifbare Stelle des Problems in entscheidender Weise ausgenutzt zu haben[3]). Eine solche gibt sich in dem Umstand zu erkennen, daß die Cesàroschen und Hölderschen Mittel erster Ordnung identisch sind. Knopp erkannte, daß sich das Problem dadurch in ein reines Cesàro-Problem umformen ließ, indem es genügte, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. *Wenn eine Folge* (s_n) *limitierbar* (C, p) *ist zum Werte* S, *wo* p *eine positive ganze Zahl ist, so ist die zugehörige Folge* M_1 *der arithmetischen Mittel*

$$m_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}$$

limitierbar $(C, p-1)$, *ebenfalls zum Werte* S, *und umgekehrt.*

Denn aus diesem Satze folgt ja unmittelbar, daß die folgenden Beziehungen für $n \to \infty$ gleichzeitig bestehen müssen:

$$C_n^r(s) \to S, \quad C_n^{r-1}(M_1) \to S, \quad C_n^{r-2}(M_2) \to S, \quad \ldots, \quad C_n^1(M_{r-1}) \to S, \quad M_r \to S,$$

und dies besagt, daß, wenn die Folge (s_n) zum Werte S limitierbar (C, r) ist, sie auch limitierbar (H, r) zum gleichen Werte sein muß, und umgekehrt.

Indessen scheint man bisher nicht bemerkt zu haben, wie einfach das Cesàro-Problem, auf welches der Äquivalenzsatz hiernach zurückgeführt werden kann, in Wirklichkeit ist. Satz 1 ist ein Spezialfall eines interessanten allgemeineren Satzes, der besagt, daß $C^r(C^\varrho)$ mit $C^{r+\varrho}$ äquivalent ist, d. h. wenn (s_n) limitierbar $(C, r+\varrho)$ ist, so ist die entsprechende Folge der Cesàroschen Mittel ϱ-ter Ordnung limitierbar (C, r)

— B. Ottolenghi, Coezistenza e identita dei limiti di Hölder e di Cesàro, Padua 1911. — I. Schur, Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Annalen **74** (1913), S. 447–458. — M. Watanabe, On the identity of Cesàro's and Hölder's limits, The Tôhoku Mathematical Journal **5** (1914), S. 21–28. — W. A. Hurwitz and L. L. Silverman, On the consistency and equivalence of certain definitions of summability, Transactions of the Amer. Math. Society **18** (1917), S. 1–20. — H. Hahn, Die Äquivalenz der Cesàro'schen und Hölder'schen Mittel, Monatshefte für Math. und Physik **33** (1923), S. 135–143. — G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Solution of the Cesàro summability problem for power-series and Fourier series, Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 67–96, besonders S. 76–77. — S. Dobrowolski, Sur les valeurs limites de moyennes de Cesàro et de Hölder, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, (A) (1925), S. 259–264.

[2]) Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Inaugural-Dissertation, Berlin 1907, S. 19–22.

[3]) Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit, Math. Zeitschr. **19** (1924), S. 97–113, siehe S. 103–104. Dieser Beweis ist in dem Buch des Herrn Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 2. Aufl., Berlin 1924, S. 481 wiedergegeben.

zum gleichen Werte, und umgekehrt (r und ϱ brauchen hier nicht ganzzahlige Werte zu haben). Für diesen Satz existieren verschiedene Beweise [4]), von denen jedoch keiner ganz einfach ist. In den Darstellungen Knopps erscheint Satz 1 als Spezialfall eines besonders formulierten Grenzwertsatzes, der sich indessen auch auf den genannten allgemeinen Cesàro-Satz zurückführen läßt. In Wirklichkeit läßt sich aber das spezielle Ergebnis, das der Satz 1 ausdrückt, in überaus einfacher Weise erreichen, ohne daß man andere Voraussetzungen als den Permanenzsatz anzuwenden braucht. Der Beweis besteht nur in der Aufstellung eines Zusammenhangs zwischen den Cesàroschen Mitteln der Folgen (s_n) und (m_n), und dieser Zusammenhang ergibt sich als von so einfacher Art, daß der Satz 1 unmittelbar daraus abgelesen werden kann.

Beweis des Satzes 1. Zunächst erhält man durch die Abelsche partielle Summation die folgende Beziehung:

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{n}(\nu+p)\,s_\nu = -\sum_{\nu=0}^{n-1} S_\nu^1 + (n+p)\,S_n^1 = -S_n^2 + (n+p+1)\,S_n^1 .$$

Schreibt man nun die Gleichung

$$m_n = \frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}$$

in der Form

$$S_n^1(s) = (n+1)\,m_n ,$$

so erhält man durch Summierung über die Indizes $0, 1, 2, \ldots, n$ mittels (1) (für $p=1$):

$$S_n^2(s) = -S_n^2(m) + (n+2)\,S_n^1(m).$$

Durch neue Summierung über die Indizes $0, 1, \ldots, n$ und Anwendung von (1), jetzt für $p=2$, erhält man:

$$S_n^3(s) = -2S_n^3(m) + (n+3)\,S_n^2(m).$$

Ersichtlich kommt man durch Wiederholung dieses Verfahrens zu der Formel:

$$(2) \qquad \underline{S_n^p(s) = (-p+1)\,S_n^p(m) + (n+p)\,S_n^{p-1}(m).}$$

[4]) G. Faber, Über die Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte, Sitzungsberichte der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München 1913, S. 519–531. — F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen, Math. Zeitschr. **19** (1921), S. 74–109. — A. F. Andersen, Om Ækvivalensen af Cesàros og Hölders Summabilitetsmetoder, Matematisk Tidsskrift B, Kopenhagen 1923, S. 1–6; Om nogle nyere Sætninger vedrørende Cesàro- og Hölder-Summabilitet, Matematisk Tidsskrift B (1925), S. 84–94. — E. Kogbetliantz, Sur la sommation des séries divergentes etc., Annales de l'École Normale Supérieure **42** (1925), S. 193–216.

Um die entsprechende Beziehung zwischen den Cesàroschen Mitteln zu erhalten, hat man nur in dieser Gleichung mit

$$\binom{n+p}{n} = \frac{n+p}{p}\binom{n+p-1}{n}$$

zu dividieren, wodurch sich

$$C_n^p(s) = (-p+1)\,C_n^p(m) + p\,C_n^{p-1}(m) \tag{3}$$

ergibt. (3) setzt in Evidenz, daß die Folge (s_n) limitierbar (C, p) zum Werte S sein muß, wenn die Folge der Mittel m_n zum Werte S limitierbar $(C, p-1)$ (also auch limitierbar (C, p)) ist.

Um die Umkehrung zu erhalten, formen wir (2) durch Einführung von

$$S_n^{p-1}(m) = S_n^p(m) - S_{n-1}^p(m)$$

um und erhalten

$$S_n^p(s) = (n+1)\,S_n^p(m) - (n+p)\,S_{n-1}^p(m),$$

welches durch Division mit

$$\binom{n+p}{n} = \frac{n+p}{n}\binom{n+p-1}{n-1}$$

in die Beziehung

$$C_n^p(s) = (n+1)\,C_n^p(m) - n\,C_{n-1}^p(m) \tag{4}$$

übergeht. Summiert man über die Indizes von 0 bis n, so erhält man die Formel

$$C_n^p(m) = \frac{C_0^p(s) + C_1^p(s) + \ldots + C_n^p(s)}{n+1},$$

welche zeigt, daß $C_n^p(m) \to S$ für $n \to \infty$, falls $C_n^p(s) \to S$, und aus (3) schließt man dann unter dieser Voraussetzung weiter, daß

$$C_n^{p-1}(m) \to S \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d. h. daß die Folge der Mittel m_n limitierbar $(C, p-1)$ ist zum Werte S, falls die Folge (s_n) zum Werte S limitierbar (C, p) ist. Hiermit ist der Beweis des Satzes 1 und mithin auch der Beweis des Äquivalenzsatzes erbracht.

Kopenhagen, 16. Mai 1927.

(Eingegangen am 19. Mai 1927.)

Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Das Problem der Umordnung einer unendlichen Reihe wurde von Herrn E. Steinitz gelöst[1]), und zwar ganz allgemein für den Fall, daß die Glieder der Reihe komplexe Zahlen mit n komplexen Einheiten sind. Herr Steinitz betrachtet allerdings nur solche Umordnungen der gegebenen Reihe, wo die umgeordnete Reihe konvergiert. Ich möchte in dieser Note zeigen, daß auch die Frage nach dem Verhalten der *divergenten* Umordnungen einer Reihe $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ mit $\alpha_n \to 0$ eine einfache und vollständige Beantwortung gestattet. Wegen Raumersparnis betrachte ich nur den Fall, daß $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ gewöhnliche komplexe Zahlen sind; dem mit den Methoden des Herrn Steinitz vertrauten Leser wird es nicht schwierig sein, die folgenden Resultate auf allgemeine komplexe Zahlen mit n komplexen Einheiten auszudehnen.

Ich betrachte zunächst die komplexe Zahlenebene, in welcher ich die komplexen Zahlen auf die übliche Weise darstelle; zu dieser Ebene rechne ich auch den „Punkt“ oder die „Zahl“ ∞ hinzu. Es sei eine Folge

$$x_1, x_2, \ldots \tag{1}$$

von endlichen komplexen Zahlen gegeben; eine endliche Zahl x soll Häufungswert der Folge (1) heißen, wenn es eine Teilfolge von (1) gibt, die gegen x konvergiert; die Zahl ∞ soll Häufungswert von (1) heißen,

[1]) E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journal f. reine u. angew. Math. **143** (1913), S. 128–175; **144** (1914), S. 1–40; **146** (1916), S. 1–52.

Vgl. auch W. Groß, Bedingt konvergente Reihen, Monatshefte f. Math. u. Phys. **28** (1917), S. 221—237; W. Threlfall, Bedingt konvergente Reihen, Math. Zeitschr. **24** (1926), S. 212—214.

wenn (1) nicht beschränkt ist. Die Menge aller Häufungswerte der Folge (1) soll *Grenzmenge der Folge* (1) heißen und mit $m(x_1, x_2, \ldots)$ bezeichnet werden.

Es sei nun eine Reihe[2])

$$a_1 + a_2 + \ldots, \qquad a_n \to 0 \tag{2}$$

vorgelegt. Ich setze

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots;$$
$$M(a_1 + a_2 + \ldots) = m(s_1, s_2, \ldots)$$

und nenne die Menge $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ *Grenzmenge der Reihe* (2). Wenn die Reihe (2) konvergiert und die Summe s hat, so besteht ihre Grenzmenge offenbar aus dem einzigen Punkt s und umgekehrt.

Wir wollen in dieser Note folgende Frage lösen: Es sei eine Reihe (2) gegeben; welche Punktmengen μ der komplexen Zahlenebene haben die Eigenschaft, daß es eine aus (2) durch Umordnung entstandene Reihe $b_1 + b_2 + \ldots$ gibt mit $M(b_1 + b_2 + \ldots) = \mu$?

Um die Frage bequem angreifen zu können, bemerken wir zunächst folgendes:

1. Wir bilden die komplexe Zahlenebene, mit Einschluß des Punktes ∞, durch die bekannte stereographische Abbildung auf die Einheitskugel ab. Jedem Punkt der Ebene entspricht auf diese Weise auf der Kugel ein „Bildpunkt", jeder Punktmenge in der Ebene eine „Bildmenge" auf der Kugel.

Wenn a, b zwei komplexe Zahlen und μ eine Punktmenge in der komplexen Zahlenebene bedeuten, so bedeute $r(a, b)$ bzw. $r(a, \mu)$ die Kugeldistanz der Bildpunkte von a und b, bzw. die Kugeldistanz des Bildpunktes von a von der Bildmenge von μ.

2. Wegen der Stetigkeitseigenschaften der genannten Abbildung gilt offenbar folgendes: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta > 0$, so daß aus $r(a, b) < \eta$ entweder $|b - a| < \varepsilon$ oder $\min(|a|, |b|) > \frac{1}{\varepsilon}$ folgt. Umgekehrt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta > 0$, so daß $r(a, b) < \varepsilon$ gilt, sobald entweder $|b - a| < \eta$ oder $\min(|a|, |b|) > \frac{1}{\eta}$ ist.

3. Eine Punktmenge auf der Kugel heiße ein Kontinuum, wenn sie abgeschlossen und nicht leer ist und wenn sie sich nicht als Summe von zwei punktfremden, abgeschlossenen, nicht leeren Mengen darstellen läßt. Eine Punktmenge in der komplexen Zahlenebene soll ein $\mathfrak{K}$-Kontinuum heißen, wenn ihre Bildmenge ein Kontinuum ist.

---

[2]) Die Glieder einer *Reihe* sollen stets *endliche* komplexe Zahlen sein; dagegen soll als Element einer *Menge* von komplexen Zahlen auch die Zahl ∞ auftreten dürfen. In der ganzen Arbeit handelt es sich um gewöhnliche komplexe Zahlen.

4. Eine nicht leere Punktmenge M in der Ebene ist dann und nur dann ein $\mathfrak{R}$-Kontinuum, wenn folgendes gilt:

a) Die Bildmenge von M ist abgeschlossen.

b) Wenn $\varepsilon > 0$ und wenn a, b zwei beliebige (nicht notwendig voneinander verschiedene) Punkte aus M sind, so gibt es eine endliche Anzahl von Punkten aus M:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \qquad (a_0 = a,\ a_n = b),$$

so daß

$$r(a_{i-1}, a_i) < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dies folgt sofort aus einer grundlegenden Eigenschaft der Kontinua[3]).

5. Wegen 2. kann man diese Bedingungen folgendermaßen umformen:

Eine nicht leere Punktmenge M in der komplexen Zahlenebene ist dann und nur dann ein $\mathfrak{R}$-Kontinuum, wenn folgendes gilt:

a) Die Bildmenge von M ist abgeschlossen.

b) Wenn $\varepsilon > 0$ und wenn a, b zwei beliebige Punkte aus M sind, so gibt es eine endliche Anzahl von Punkten aus M:

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \qquad (a_0 = a,\ a_n = b),$$

so daß für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$|a_i - a_{i-1}| < \varepsilon, \quad \min(|a_{i-1}|, |a_i|) > \frac{1}{\varepsilon}$$

erfüllt ist.

Nun beweist man leicht den folgenden

Satz 1. *Wenn in einer Reihe*

$$a_1 + a_2 + \ldots$$

gilt $a_n \to 0$, *so ist* $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ *ein* $\mathfrak{R}$*-Kontinuum.*

Beweis. Es sei $M(a_1 + a_2 + \ldots) = \mu$. Die Bildmenge von μ ist offenbar abgeschlossen und nicht leer. Es sei $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Wegen $s_n - s_{n-1} \to 0$ ist auch $r(s_{n-1}, s_n) \to 0$. Weiter ist auch $r(s_n, \mu) \to 0$, denn sonst hätten die s_n einen Häufungswert außerhalb μ. Es sei $\varepsilon > 0$; ich wähle $n_0 > 0$ so groß, daß für ganze $n > n_0$ gilt

$$r(s_{n-1}, s_n) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad r(s_n, \mu) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es seien α, β zwei Punkte aus μ; man kann zwei ganze Zahlen n', n'' so wählen, daß

$$n'' > n' > n_0, \quad r(s_{n'}, \alpha) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad r(s_{n''}, \beta) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

[3]) Vgl. z. B. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Bd. I, S. 83, Satz IV und S. 84, Satz V. (Berlin: Julius Springer 1921.)

Es sei nun n eine ganze Zahl, $n' < n < n''$; dann gibt es (wegen $n > n_0$) einen Punkt α_n in μ mit $r(s_n, \alpha_n) < \frac{\varepsilon}{3}$. Die Punkte $\alpha_{n'} = \alpha$, $\alpha_{n'+1}$, $\alpha_{n'+2}, \ldots, \alpha_{n''} = \beta$ gehören zu μ, und es ist für $n' < n \leqq n''$

$$r(\alpha_{n-1}, \alpha_n) \leqq r(\alpha_{n-1}, s_{n-1}) + r(s_{n-1}, s_n) + r(s_n, \alpha_n) < \varepsilon,$$

woraus wegen 4. die Behauptung folgt.

Der Satz 1 läßt sich aber gewissermaßen auch umkehren; wir werden nämlich im folgenden Paragraphen beweisen: Wenn $a_1 + a_2 + \ldots$ eine Reihe mit $a_n \to 0$ ist und μ ein beliebiges $\mathfrak{R}$-Kontinuum, so kann man die Reihe $a_1 + a_2 + \ldots$ zu einer Reihe $b_1 + b_2 + \ldots$ so umordnen, daß

$$M(b_1 + b_2 + \ldots) = \mu,$$

abgesehen von einigen trivialen und genau angebbaren Ausnahmefällen.

Bei dem Beweis dieser Behauptung (Satz 2) werde ich von den Ergebnissen des Herrn Steinitz ausgiebig Gebrauch machen und setze daher beim Leser die Kenntnis des ersten Teiles seiner Abhandlung voraus[4]).

§ 2.

Der Hauptsatz.

Zunächst erinnere ich an einige Definitionen und Ergebnisse des Herrn Steinitz. Wenn

$$\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \ldots + a_n \varepsilon_n, \qquad \beta = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \ldots + b_n \varepsilon_n$$

(a_i, b_i reell, ε_i komplexe Einheiten) zwei komplexe Zahlen sind, so werde ihr inneres Produkt[5]) durch die reelle Zahl $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ definiert; wenn also insbesondere α, β gewöhnliche komplexe Zahlen sind und $|\beta| = 1$, also $\beta = e^{i\varphi}$ (φ reell), so ist ihr inneres Produkt gleich $\mathfrak{R}(\alpha e^{-i\varphi})$.

Eine Menge M von endlichen komplexen Zahlen heißt in der Richtung φ beschränkt[6]), wenn die Menge der reellen Zahlen $\mathfrak{R}(\alpha e^{-i\varphi})$, wo α alle Zahlen aus M durchläuft, nach oben beschränkt ist.

Eine Menge M von endlichen komplexen Zahlen soll symmetrisch ausgedehnt[7]) heißen, wenn es kein reelles φ gibt, für welches M in der Richtung φ beschränkt, in der „entgegengesetzten" Richtung $\varphi + \pi$ unbeschränkt wäre.

---

[4]) Es handelt sich um den im Bd. **143** des Journ. f. reine u. angew. Math. enthaltenen Teil seiner Abhandlung, der weiter kurz mit St. zitiert wird.

[5]) St., S. 134.

[6]) St., S. 145. φ soll stets eine reelle Zahl bedeuten; zwei Richtungen φ und $\varphi + 2k\pi$ (k ganz) sollen als nicht untereinander verschieden gelten. In der Ausdrucksweise des Herrn Steinitz sollte man eigentlich von der „Richtung $e^{i\varphi}$" sprechen.

[7]) St., S. 145.

Eine symmetrisch ausgedehnte Menge M ist entweder in allen Richtungen beschränkt oder es gibt genau ein Paar von entgegengesetzten Richtungen, in welchen M beschränkt ist oder es ist M in keiner Richtung beschränkt[8]).

Wenn M eine Menge von endlichen komplexen Zahlen ist, so bedeute $\overline{M}$ die kleinste konvexe Punktmenge, die M enthält[9]).

Wenn (A) eine Folge $a_1, a_2, \ldots$ von endlichen komplexen Zahlen ist, so bedeute A_* die Menge aller „Partialsummen der Folge (A)", d. h. die Menge aller Zahlen

$$a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_n}$$

($n \geqq 0$ ganz, $k_i > 0$ ganz, $k_i \neq k_j$ für $i \neq j$; für $n = 0$ soll die „leere Partialsumme" $a_{k_1} + \ldots + a_{k_n}$ Null bedeuten).

Nun zu unserer Frage!

Es sei eine unendliche Reihe

$$a_1 + a_2 + \ldots; \qquad a_n \to 0 \tag{2}$$

vorgelegt. Wir bilden die Menge A_* aller Partialsummen der Folge $a_1, a_2, \ldots$.

Es sind folgende zwei Fälle möglich:

I. A_* ist nicht symmetrisch ausgedehnt; d. h. es gibt ein reelles φ, so daß[10]) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \Re\,(a_n e^{-i\varphi})$ konvergiert, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{neg} \Re\,(a_n e^{-i\varphi})$ divergiert. Dann besteht offenbar $M(a_1 + a_2 + \ldots)$ aus dem einzigen Punkt ∞ und dasselbe gilt auch von jeder aus (2) durch Umordnung entstandenen Reihe.

II. A_* ist symmetrisch ausgedehnt. Dann sind drei Unterfälle möglich:

1. A_* ist in jeder Richtung beschränkt; mit anderen Worten: (2) ist absolut konvergent. Dieser Fall ist also trivial.

2. Es gibt genau ein Paar von entgegengesetzten Richtungen, φ und $\varphi + \pi$, in welchen A_* beschränkt ist; mit anderen Worten, es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\,(a_n e^{-i\varphi})$ absolut konvergent, $\sum_{n=1}^{\infty} |\Im\,(a_n e^{-i\varphi})|$ divergent; unsere Untersuchung reduziert sich also auf die Untersuchung der Umordnungen der reellen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \Im\,(a_n e^{-i\varphi})$, die ziemlich trivial ist und daher wohl unterdrückt werden darf.

3. A_* ist in keiner Richtung beschränkt. Dies ist der einzige schwierige Fall, der durch folgenden Satz erledigt wird:

Satz 2. *Es sei eine Reihe*

$$a_1 + a_2 + \ldots; \qquad a_n \to 0 \tag{2}$$

[8]) St., S. 146.

[9]) St., S. 150.

[10]) Wenn a reell, so sei $\operatorname{pos} a = \max(a, 0)$, $\operatorname{neg} a = \min(a, 0)$.

gegeben; die Menge A_* der Partialsummen der Folge

(3) $$(A) \quad a_1, a_2, \ldots$$

sei in keiner Richtung beschränkt.

Es sei μ ein beliebiges $\aleph$-Kontinuum; dann gibt es eine Reihe

$$b_1 + b_2 + \ldots,$$

die aus (2) durch Umordnung entsteht, so daß

$$M(b_1 + b_2 + \ldots) = \mu.$$

Wir beweisen zunächst folgenden

Hilfssatz. *Die Folge*

(3) $$a_1, a_2, \ldots$$

erfülle die Voraussetzungen des Satzes 2. Es sei $n_0 > 0$, $\varepsilon > 0$, α sei eine endliche komplexe Zahl. Dann gibt es eine Partialsumme

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_m} \qquad (m > 0 \text{ ganz}, \ n_j > n_0, \ n_i \neq n_j \text{ für } i \neq j)$$

und m reelle Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_m$ mit $0 \leqq t_j \leqq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$, $t_m = 1$, so daß

$$\left| \sum_{j=1}^{l} a_{n_j} - t_l \alpha \right| < \varepsilon \qquad (l = 1, 2, \ldots, m).$$

Beweis. Nach H. Steinitz gelten folgende Sätze[11]):

1. Wenn eine Menge M von endlichen komplexen Zahlen in keiner Richtung beschränkt ist, so ist $\bar{M}$ die Menge aller endlichen komplexen Zahlen[12]).

2. Ist (A) eine Folge endlicher komplexer Zahlen, deren absolute Werte die positive Zahl δ nicht überschreiten, so gibt es zu jeder Zahl γ aus $\bar{A}_*$ eine Zahl σ aus A_* mit

$$|\gamma - \sigma| \leqq 2\delta^{13}).$$

3. Hat man eine endliche Anzahl von endlichen komplexen Zahlen, deren absolute Werte $\leqq \delta$ sind, und hat ihre Summe σ einen absoluten Wert $\leqq q\delta$ $(q \geqq 0$ ganz$)$, so lassen die gegebenen Zahlen eine solche Anordnung $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ zu, daß die absoluten Werte der Summen

$$\sigma_k = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

sämtlich $\leqq (4 + q)\delta$ sind[14]).

[11]) In einer für $n = 2$ spezialisierten und ein wenig modifizierten Form dargestellt.
[12]) St., S. 157, Satz 2.
[13]) St., S. 170, Satz I.
[14]) St., S. 172, Satz II.

Wenn wir nun in der Folge (3) endlich viele Glieder unterdrücken, so genügt die übriggebliebene Folge (B) offenbar wieder den Voraussetzungen des Satzes 2, also ist B_* in keiner Richtung beschränkt[15]). Wir wählen erstens eine ganze positive Zahl r so, daß $\frac{|\alpha|}{r} < \frac{\varepsilon}{5}$; dann wählen wir eine ganze Zahl $\nu > n_0$ so, daß $|a_n| < \frac{\varepsilon}{20}$ für $n \geqq \nu$. Aus der Folge

$$a_\nu, a_{\nu+1}, \dots \tag{4}$$

greifen wir (was nach 1 und 2 möglich ist) endlich viele Glieder $b_1, b_2, \dots, b_{k_1}$ so heraus, daß

$$\left| \sum_{i=1}^{k_1} b_i - \frac{\alpha}{r} \right| < \frac{\varepsilon}{10}.^{16}) \tag{5}$$

Dann greifen wir aus den dabei nicht verbrauchten Gliedern von (4) wieder endlich viele Glieder $b_{k_1+1}, b_{k_1+2}, \dots, b_{k_2}$ so heraus, daß

$$\left| \sum_{i=k_1+1}^{k_2} b_i - \left(2\frac{\alpha}{r} - \sum_{i=1}^{k_1} b_i \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{k_2} b_i - 2\frac{\alpha}{r} \right| < \frac{\varepsilon}{10}.$$

Im allgemeinen, wenn die Zahlen

$$k_1, k_2, \dots, k_l; \quad b_1, b_2, \dots, b_{k_l} \qquad (1 \leqq l < r)$$

bereits definiert sind, greifen wir aus den bisher nicht verbrauchten Gliedern von (4) endlich viele Glieder

$$b_{k_l+1}, b_{k_l+2}, \dots, b_{k_{l+1}}$$

so heraus, daß

$$\left| \sum_{i=1}^{k_{l+1}} b_i - (l+1)\frac{\alpha}{r} \right| < \frac{\varepsilon}{10}.$$

So bekommen wir im ganzen k_r Zahlen $b_1, b_2, \dots, b_{k_r}$; es ist offenbar für $j = 0, 1, \dots, r-1$ ($k_0 = 0$ gesetzt)

$$\left| \sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} b_i \right| < \frac{|\alpha|}{r} + \frac{\varepsilon}{5} < \frac{2\varepsilon}{5};$$

nach 3. kann man also die b_i $(i = k_j + 1, k_j + 2, \dots, k_{j+1})$ so anordnen, daß in der neuen Anordnung

$$c_{k_j+1}, c_{k_j+2}, \dots, c_{k_{j+1}}$$

---

[15]) St., S. 173.

[16]) Wir dürfen und wollen voraussetzen, daß $\sum_{i=1}^{k_1} b_i$ nicht die „leere Partialsumme" ist; denn wir können zu ihr noch ein so kleines Glied von (4) hinzufügen, daß die Ungleichung (5) dadurch nicht gestört wird. Dieselbe Bemerkung bei $\sum_{i=k_1+1}^{k_2} b_i$ usw.

für $k_j + 1 \leqq l \leqq k_{j+1}$ gilt

$$\left| \sum_{i=k_j+1}^{l} c_i \right| \leqq (4+8)\frac{\varepsilon}{20} = \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Die Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_{k_r}$ leisten aber schon alles Verlangte; denn es ist erstens

$$\left| \sum_{i=1}^{k_r} c_i - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon;$$

zweitens gibt es zu jedem ganzen l mit $1 \leqq l < k_r$ ein ganzes j mit $0 \leqq j < r$, $k_j < l \leqq k_{j+1}$; dann ist aber

$$\left| \sum_{i=1}^{l} c_i - j\frac{\alpha}{r} \right| \leqq \left| \sum_{i=1}^{k_j} c_i - j\frac{\alpha}{r} \right| + \left| \sum_{i=k_j+1} c_i \right| < \frac{\varepsilon}{10} + \frac{3\varepsilon}{5} < \varepsilon.$$

Beweis des Satzes 2. Wir erledigen zunächst den Fall, daß μ aus dem einzigen Punkt ∞ besteht. Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{pos} \Re(a_n)$ divergent. Es seien $c_1, c_2, \ldots$ diejenigen Glieder von (3), für welche $\Re(c_n) > 0$; die übrigen Glieder von (3) sollen mit $d_1, d_2, \ldots$ bezeichnet werden. Wir wählen eine Folge $k_1, k_2, \ldots$ von wachsenden natürlichen Zahlen derart, daß

$$\sum_{j=1}^{k_n} \Re(c_j) > n + \sum_{j=1}^{n} |\Re(d_j)|;$$

dann hat die Reihe

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_{k_1} + d_1 + c_{k_1+1} + \ldots + c_{k_2} + d_2 + \ldots$$

offenbar für ihre Grenzmenge den Punkt ∞, da die Reihe der Realteile gegen $+\infty$ divergiert.

In den noch übrigbleibenden Fällen sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. μ besteht aus einem einzigen endlichen Punkt.

2. μ besteht aus mehr als einem Punkt; dann ist die Bildmenge von μ perfekt.

In jedem von diesen beiden Fällen wählen wir eine Folge von komplexen Zahlen

$$y_1, y_2, \ldots \tag{6}$$

folgendermaßen:

Ad 1. Wenn μ aus einem einzigen endlichen Punkt x besteht, so sei $y_1 = y_2 = \ldots = x$; es ist also $m(y_1, y_2, \ldots) = \mu$.

Ad 2. Wenn μ aus mehr als einem Punkt besteht, so wähle ich zunächst eine abzählbare Teilmenge μ_1 von μ so, daß die Bildmenge von μ_1

in der Bildmenge von μ dicht ist. Die Punkte von μ_1 sollen mit $x_1, x_2, \ldots$ bezeichnet werden. Weil die Bildmenge von μ in sich dicht ist, so gilt folgendes: Wenn wir aus μ_1 endlich viele Punkte unterdrücken, so liegen die Bildpunkte der übrigbleibenden Punkte von μ_1 auch dicht in der Bildmenge von μ. Wir dürfen und wollen daher voraussetzen, daß alle x_n endliche Zahlen sind.

Zu jedem ganzen $n > 0$ wählen wir nun eine endliche Anzahl von endlichen Punkten aus μ

$$x_n = z_n^0,\ z_n^1,\ z_n^2,\ \ldots,\ z_n^{l_n},\ z_n^{l_n+1} = x_{n+1} \qquad (l_n \geqq 0)$$

so, daß für jedes ganze i mit $1 \leqq i \leqq l_n + 1$ mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$|z_n^i - z_n^{i-1}| < \frac{1}{n}, \qquad \min(|z_n^{i-1}|, |z_n^i|) > n$$

erfüllt ist.

Wenn $\min(|z_n^{i-1}|, |z_n^i|) > n$, so wählen wir eine endliche Zahl y_n^i so, daß die beiden geradlinigen Strecken $\overline{z_n^{i-1} y_n^i}$, $\overline{y_n^i z_n^i}$ ganz außerhalb des Kreises $|z| = n$ liegen; sonst wählen wir $y_n^i = z_n^i$. So bekommen wir eine Folge von endlichen Zahlen

$$\begin{aligned} &z_1^0,\ y_1^1,\ z_1^1,\ y_1^2,\ \ldots,\ y_1^{l_1},\ z_1^{l_1},\ y_1^{l_1+1},\ z_2^0,\ y_2^1,\ z_2^1,\ \ldots, \\ &y_2^{l_2},\ z_2^{l_2},\ y_2^{l_2+1},\ z_3^0,\ y_3^1,\ \ldots\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Folge (7) hat offenbar folgende Eigenschaften. Erstens ist jeder Punkt von μ Häufungswert von (7). Umgekehrt ist aber jede Zahl aus (7) in der Menge μ enthalten, ausgenommen höchstens einige oder alle diejenigen y_n^i, für welche $|y_n^i| > n$ ist. Ein solches y_n^i kommt aber nur dann vor, wenn auch das zugehörige z_n^i absolut genommen größer als n ist. Wenn also μ beschränkt ist, d. h. wenn die Zahl ∞ nicht zu μ gehört, so sind alle Glieder von (7) in μ enthalten, ausgenommen höchstens endlich viele Glieder; nur wenn μ nicht beschränkt ist, d. h. wenn μ die Zahl ∞ enthält, kann es in (7) eine unendliche Teilfolge von Gliedern geben, die nicht zu μ gehören; diese Teilfolge konvergiert dann aber notwendig gegen ∞. Es ist also — weil die Bildmenge von μ abgeschlossen ist — in jedem Fall die Grenzmenge der Folge (7) gleich μ.

Wir bezeichnen die Glieder von (7) der Reihe nach mit

$$y_1, y_2, y_3, \ldots; \tag{6}$$

damit haben wir in den beiden auf S. 367 angegebenen Fällen eine Folge (6) von endlichen Zahlen konstruiert, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. $m(y_1, y_2, \ldots) = \mu$.

2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 > 0$ so, daß für jedes ganze $n > n_0$ *entweder* $|y_n - y_{n-1}| < \varepsilon$ ist *oder* die Strecke $\overline{y_{n-1}\, y_n}$ ganz außerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{\varepsilon}$ liegt.

Wir ordnen nun die Reihe

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{2}$$

folgendermaßen um:

Zunächst nehmen wir a_1 und dann eine gewisse Anzahl von Gliedern aus der Folge $a_2, a_3, \ldots$, die wir mit $b_1, b_2, \ldots, b_{k_1}$ bezeichnen, mit folgenden Eigenschaften:

1. $\left|\sum_{i=1}^{k_1} b_i - (y_1 - a_1)\right| < 1$.

2. Zu jedem j $(j = 1, 2, \ldots, k_1 - 1)$ gibt es eine Zahl t_j mit $0 \leqq t_j \leqq 1$ so, daß

$$\left|\sum_{i=1}^{j} b_i - t_j (y_1 - a_1)\right| < 1.$$

(Nach dem Hilfssatz mit $\varepsilon = 1$, $\alpha = y_1 - a_1$.) Dann nehmen wir aus der Folge

$$a_1, a_2, \ldots \tag{3}$$

das erste nichtverbrauchte Glied a_{r_2} und dann eine gewisse Anzahl von bisher nichtverbrauchten Gliedern aus (3), die wir mit $b_{k_1+1}, b_{k_1+2}, \ldots, b_{k_2}$ bezeichnen, mit nachstehenden Eigenschaften (wir setzen $r_1 = 1$):

1. $\left|a_{r_1} + a_{r_2} + \sum_{i=1}^{k_2} b_i - y_2\right| < \frac{1}{2}$.

2. Zu jedem j $(j = k_1 + 1, \ldots, k_2 - 1)$ gibt es eine Zahl t_j mit $0 \leqq t_j \leqq 1$, so daß

$$\left|\sum_{i=k_1+1}^{j} b_i - t_j\left(y_2 - a_{r_1} - a_{r_2} - \sum_{i=1}^{k_1} b_i\right)\right| < \frac{1}{2}.$$

$\left(\text{Nach dem Hilfssatz mit } \varepsilon = \frac{1}{2},\ \alpha = y_2 - a_{r_1} - a_{r_2} - \sum_{i=1}^{k_1} b_i.\right)$

Im allgemeinen, wenn die Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{k_{n-1}}$ bereits gewählt sind, sei a_{r_n} das erste unter den Gliedern

$$b_1, b_2, \ldots, b_{k_{n-1}},\ a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_{n-1}} \tag{8}$$

nicht auftretende Glied der Folge (3), und $b_{k_{n-1}+1}, b_{k_{n-1}+2}, \ldots, b_{k_n}$ seien endlich viele Glieder von (3), unter welchen kein Glied von (8) und ebenso die Zahl a_{r_n} nicht auftritt, und welche folgende Eigenschaften haben:

1. $\left| a_{r_1} + a_{r_2} + \ldots + a_{r_n} - y_n + \sum_{i=1}^{k_n} b_i \right| < \frac{1}{n}$.

2. Zu jedem ganzen j $(k_{n-1} + 1 \leqq j \leqq k_n - 1)$ gibt es eine Zahl t_j $(0 \leqq t_j \leqq 1)$ so, daß

$$\left| \sum_{i=k_{n-1}+1}^{j} b_i - t_j \left(y_n - a_{r_1} - \ldots - a_{r_n} - \sum_{i=1}^{k_{n-1}} b_i \right) \right| < \frac{1}{n}.$$

(Nach dem Hilfssatz mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\alpha = y_n - a_{r_1} - \ldots - a_{r_n} - \sum_{i=1}^{k_{n-1}} b_i$.)

Wir untersuchen nun die aus (2) durch Umordnung entstehende Reihe

(9) $a_{r_1} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} + a_{r_2} + b_{k_1+1} + b_{k_1+2} + \ldots + b_{k_2} + a_{r_3} + \ldots$.

Es sei s_m die Summe der ersten m Glieder der Reihe (9). Für ganzes $n > 0$ ist[17])

$$s_{k_n+n} = y_n + \frac{\theta}{n};$$

also *enthält die Grenzmenge der Reihe* (9) sicher alle Häufungswerte von (6), also auch *die Menge* μ.

Es sei andererseits m eine natürliche Zahl, $m > k_1 + 1$; n sei so gewählt, daß

$$k_n + n < m \leqq k_{n+1} + n + 1;$$

dann ist also

$$\begin{aligned} s_m &= s_{k_n+n} + a_{r_{n+1}} + \sum_{j=k_n+1}^{u} b_j \quad [18]) \qquad (k_n \leqq u \leqq k_{n+1}) \\ &= s_{k_n+n} + a_{r_{n+1}} + \tau_m \left(y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} a_{r_i} - \sum_{i=1}^{k_n} b_i \right) + \frac{\theta}{n} \quad (0 \leqq \tau_m \leqq 1) \\ &= y_n + \frac{\theta}{n} + a_{r_{n+1}} + \tau_m \left(y_{n+1} - y_n - a_{r_{n+1}} - \frac{\theta}{n} \right) + \frac{\theta}{n}; \end{aligned}$$

(10) $$s_m = (1 - \tau_m)\, y_n + \tau_m\, y_{n+1} + o(1)$$

(das Zeichen o bezieht sich auf wachsendes m).

Bei $m \to \infty$ ist auch $n \to \infty$; zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört daher ein $m_0 > 0$, so daß für $m > m_0$ entweder $|y_n - y_{n+1}| < \varepsilon$ ist oder die ganze Strecke $\overline{y_n y_{n+1}}$ außerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{\varepsilon}$ liegt. D. h. für jedes $m > m_0$ ist

$$\text{entweder} \quad s_m = y_n + \theta\varepsilon + o(1) \quad \text{oder} \quad |s_m| > \frac{1}{\varepsilon} + o(1).$$

[17]) Mit θ bezeichnen wir unterschiedslos komplexe Zahlen, deren absolute Werte kleiner als 1 sind.

[18]) $\sum_{i=m+1}^{m} x_i$ soll Null bedeuten.

Die Grenzmenge der Folge $s_1, s_2, \ldots$ kann also keinen Punkt enthalten, der nicht in $m(y_1, y_2, \ldots) = \mu$ enthalten wäre, ausgenommen höchstens den Punkt ∞. Wenn aber $m(s_1, s_2, \ldots)$ den Punkt ∞ enthält, so ist nach (10) die Folge $y_1, y_2, \ldots$ nicht beschränkt, also gehört der Punkt ∞ zu $m(y_1, y_2, \ldots) = \mu$. Es ist also

$$m(s_1, s_2, \ldots) = \mu,$$

w. z. b. w.

Bemerkungen. 1. Der Satz 2 enthält den Satz des Herrn Steinitz für gewöhnliche komplexe Zahlen; denn eine aus einem einzigen endlichen Punkte bestehende Menge ist ein $\mathfrak{R}$-Kontinuum; man kann daher die Reihe (2) unter den Voraussetzungen des Satzes 2 zu jeder endlichen Summe umordnen. Die übrigen, am Anfang des § 2 aufgezählten Fälle I, II 1, II 2 sind aber trivial.

2. Bei der Wahl der Zahlen $k_1, k_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ im Beweise des Satzes 2 besteht noch eine gewisse Willkür, die man aber leicht durch Angabe einer geeigneten Vorschrift, nach welcher die Wahl geschehen soll, beseitigen kann; vgl. z. B. St., S. 173—175. Auch eine bei der Wahl der Folge (6) auftretende Willkür kann man leicht beseitigen.

(Eingegangen am 8. Juni 1927.)

Über einen Satz von Herrn I. Schur.

Von

Wolfgang Gleißberg in Breslau.

Herr I. Schur hat kürzlich folgenden interessanten Satz bewiesen[1]):

I. *Jede Zahl läßt ebenso viele Zerlegungen in Summanden von der Form* $6x \pm 1$ *zu wie Zerlegungen von der Art, daß irgend zwei Summanden derselben Zerlegung stets mindestens die Differenz* 3, *falls sie aber beide durch* 3 *teilbar sind, mindestens die Differenz* 6 *besitzen.*

Dieser Satz stellt eine Beziehung her zwischen Zerlegungen in Summanden, die einer vorgeschriebenen Zahlenfolge entnommen sind, und solchen Zerlegungen, in denen nur die Differenzen der Summanden eine gewisse Bedingung erfüllen. Von derselben Art sind — worauf Herr Schur hinweist — die folgenden Sätze:

II. *Jede Zahl läßt ebenso viele Zerlegungen in ungerade Summanden zu wie Zerlegungen von der Art, daß irgend zwei Summanden derselben Zerlegung stets mindestens die Differenz* 1 *besitzen.*

III. *Jede Zahl läßt ebenso viele Zerlegungen in Summanden von der Form* $5x \pm 1$ *zu wie Zerlegungen von der Art, daß irgend zwei Summanden derselben Zerlegung stets mindestens die Differenz* 2 *besitzen.*

IV. *Jede Zahl läßt ebenso viele Zerlegungen in Summanden von der Form* $5x \pm 2$ *zu wie Zerlegungen von der Art, daß irgend zwei Summanden derselben Zerlegung stets mindestens die Differenz* 2 *besitzen und der Summand* 1 *nicht vorkommt.*

Den Satz II hat Euler mit Hilfe der Identität

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2\nu-1}} = \prod_{\mu=1}^{\infty} (1+x^{\mu})$$

bewiesen[2]). Der Beweis läßt sich aber auch leicht auf arithmetischem Wege führen[3]).

[1]) I. Schur, Zur additiven Zahlentheorie, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1926, S. 488–495.

[2]) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum (1748), Bd. I, Kap. XVI, S. 272.

[3]) P. Bachmann, Additive Zahlentheorie (1910), S. 109.

Die Sätze III und IV hat Herr Schur bewiesen, indem er die Produkte

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5\nu-4})(1-x^{5\nu-1})}, \qquad \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^{5\nu-3})(1-x^{5\nu-2})}$$

in Form unendlicher Determinanten darstellte[4]). Ein rein arithmetischer Beweis dieser beiden Sätze ist jedoch, soweit mir bekannt, bisher nicht gefunden worden.

Dagegen kann, wie ich im folgenden zeigen will, Satz I, zu dessen Beweis sich Herr Schur wiederum der Produktdarstellung einer unendlichen Determinante bedient, auf arithmetischem Wege bewiesen werden. Zu diesem Zwecke ersetze ich Satz I durch einen ihm gleichwertigen mit Hilfe der folgenden Verallgemeinerung des Satzes II[5]):

II′. *Ist u eine ungerade Zahl, so läßt jede Zahl ebenso viele Zerlegungen in ungerade, zu u teilerfremde Summanden zu wie in voneinander verschiedene, zu u teilerfremde Summanden.*

Setzt man insbesondere $u = 3$, so besagt Satz II′, daß sich jede Zahl auf ebenso viele Arten in ungerade, nicht durch 3 teilbare Summanden zerlegen läßt wie in verschiedene, durch 3 nicht teilbare Summanden; und da die ungeraden, nicht durch 3 teilbaren Zahlen identisch sind mit den Zahlen von der Form $6x \pm 1$, so ist, wenn sich der Satz

I′. *Jede Zahl läßt ebenso viele Zerlegungen in voneinander verschiedene, nicht durch 3 teilbare Summanden zu wie Zerlegungen von der Art, daß irgend zwei Summanden derselben Zerlegung stets mindestens die Differenz 3, falls sie aber beide durch 3 teilbar sind, mindestens die Differenz 6 besitzen*

auf arithmetischem Wege beweisen läßt, auch Satz I auf arithmetischem Wege bewiesen.

---

[4]) I. Schur, Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1917, S. 302–321. — Die die Sätze III und IV enthaltenden Identitäten

$$1 + \frac{q}{1-q} + \frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)} + \ldots = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5\nu-4})(1-q^{5\nu-1})},$$

$$1 + \frac{q^2}{1-q} + \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)} + \ldots = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5\nu-3})(1-q^{5\nu-2})}$$

sind schon 1894 von L. J. Rogers (Proceedings of the London Mathematical Society **25**, S. 328 f.) bewiesen worden, ohne daß damals ihre zahlentheoretische Bedeutung bemerkt worden wäre.

[5]) Diese Verallgemeinerung folgt unmittelbar aus dem arithmetischen Beweise des Satzes II. Vgl. P. Bachmann, a. a. O.

Zwecks kürzerer Ausdrucksweise mögen die in Satz I′ erstgenannten Zerlegungen als „Zerlegungen A“, die letztgenannten als „Zerlegungen B“ bezeichnet werden. Ferner sei $A(n)$ die Anzahl der Zerlegungen A einer Zahl n und $B(n)$ die Anzahl der Zerlegungen B von n. Satz I′ wird dann durch die Gleichung

$$A(n) = B(n) \tag{1}$$

ausgedrückt.

Die hier zur Anwendung gelangende Beweismethode gestattet, den Satz I′ in folgender verschärften Form zu beweisen:

V. *Für jede Zahl gibt es ebenso viele Zerlegungen A in s Summanden wie Zerlegungen B in s Summanden, wofern jeder durch 3 teilbare Summand als zwei Summanden gezählt wird.*

Bezeichnet man durch $A(n, s)$ die Anzahl der Zerlegungen A von n in s Summanden und durch $B(n, s)$ die Anzahl der Zerlegungen B von n in s Summanden (jeder durch 3 teilbare Summand doppelt gezählt), so wird Satz V durch die Gleichung

$$A(n, s) = B(n, s) \tag{2}$$

dargestellt. Den Beweis dieser Gleichung, aus der a fortiori Gleichung (1) folgt, führe ich durch den Nachweis, daß $A(n, s)$ und $B(n, s)$ dieselbe Rekursionsformel erfüllen.

§ 1.

Beweis der Rekursionsformel für $A(n, s)$.

Die zu beweisende Rekursionsformel lautet:

$$\begin{aligned} A(n, s) = {} & A(n - 3s, s) + A(n - 3s + 2, s - 1) \\ & + A(n - 3s + 1, s - 1) + A(n - 3s + 3, s - 2), \end{aligned} \tag{3}$$

wobei die Festsetzung getroffen wird, daß

$$A(0, 0) = 1,$$

im übrigen aber, wenn $n \leqq 0$ oder $s \leqq 0$ wird, stets $A(n, s) = 0$ zu setzen ist.

Zum Beweise der Gleichung (3) teile ich die Zerlegungen A von n mit der Summandenzahl s in folgender Weise in vier Klassen ein:

Zur ersten Klasse gehören die Zerlegungen, die weder den Summand 1 noch den Summand 2 enthalten, deren kleinster Summand also mindestens gleich 4 ist;

zur zweiten Klasse gehören die Zerlegungen, in denen zwar der Summand 1, nicht aber der Summand 2 vorkommt;

zur dritten Klasse gehören die Zerlegungen, in denen zwar der Summand 2, nicht aber der Summand 1 vorkommt;

zur vierten Klasse gehören die Zerlegungen, in denen die Summanden 1 und 2 vorkommen.

Jeder Zerlegung der ersten Klasse kann man dadurch, daß man jeden Summanden um 3 vermindert, eine Zerlegung A von $n-3s$ mit der Summandenzahl s umkehrbar eindeutig zuordnen; die erste Klasse enthält also

$$A(n-3s, s)$$

Zerlegungen.

Jeder Zerlegung der zweiten Klasse kann man dadurch, daß man den Summand 1 wegläßt und jeden der übrigen Summanden um 3 vermindert, eine Zerlegung A von $n-3s+2$ mit der Summandenzahl $s-1$ umkehrbar eindeutig zuordnen; die zweite Klasse enthält also

$$A(n-3s+2, s-1)$$

Zerlegungen[6]).

Jeder Zerlegung der dritten Klasse kann man dadurch, daß man den Summand 2 wegläßt und jeden der übrigen Summanden um 3 vermindert, eine Zerlegung A von $n-3s+1$ mit der Summandenzahl $s-1$ umkehrbar eindeutig zuordnen; die dritte Klasse enthält also

$$A(n-3s+1, s-1)$$

Zerlegungen.

Jeder Zerlegung der vierten Klasse kann man dadurch, daß man die Summanden 1 und 2 wegläßt und jeden der übrigen Summanden um 3 vermindert, eine Zerlegung A von $n-3s+3$ mit der Summandenzahl $s-2$ umkehrbar eindeutig zuordnen; die vierte Klasse enthält also

$$A(n-3s+3, s-2)$$

Zerlegungen.

Die Gleichung (3) ist somit bewiesen.

§ 2.

Beweis der Rekursionsformel für $B(n, s)$.

Da, wie ich behaupte, $B(n, s)$ dieselbe Rekursionsformel erfüllt wie $A(n, s)$, so ist die folgende Gleichung zu beweisen:

$$(4) \qquad B(n,s) = B(n-3s, s) + B(n-3s+2, s-1) + B(n-3s+1, s-1) + B(n-3s+3, s-2).$$

Zum Beweise führe ich eine Größe $B_m(n, s)$ auf Grund folgender Definition ein: $B_m(n, s)$ sei die Anzahl der Zerlegungen B von n mit der

[6]) Der Fall, daß die Zerlegung nur aus dem einzigen Summand 1 besteht, ist durch die Festsetzung $A(0, 0) = 1$ berücksichtigt; das entsprechende gilt für die dritte und vierte Klasse.

Summandenzahl[7]) s, in denen der größte Summand gleich m ist. Es werde ferner die Festsetzung

$$B_0(0, 0) = 1$$

getroffen, während in den übrigen Fällen, wenn wenigstens eine der Größen m, n, s kleiner als 1 ist, stets

$$B_m(n, s) = 0$$

sein soll.

Dann bestehen offenbar folgende Relationen[8]):

$$(5)\quad \begin{cases} B_{3\nu+1}(n, s) = \sum_{\varkappa=0}^{3\nu-2} B_\varkappa(n - 3\nu - 1, s - 1), \\ B_{3\nu+2}(n, s) = \sum_{\varkappa=0}^{3\nu-1} B_\varkappa(n - 3\nu - 2, s - 1), \\ B_{3\nu+3}(n, s) = \sum_{\varkappa=0}^{3\nu-1} B_\varkappa(n - 3\nu - 3, s - 2). \end{cases} \qquad (\nu \geqq 1)$$

Aus den letzten beiden dieser Relationen folgt noch die Beziehung:

$$(6)\quad B_{3\nu+3}(n, s) = B_{3\nu+2}(n - 1, s - 1).$$

Ferner lassen sich leicht die folgenden 7 Gleichungen verifizieren, da nur für die jeweils in eckigen Klammern angegebenen Wertepaare n, s die beiden Seiten der Gleichung zu 1, sonst zu 0 werden:

$$(7)\quad \begin{cases} B_0(n, s) = B_0(n - 3s, s) & [n = 0,\ s = 0], \\ B_1(n, s) = B_0(n - 3s + 2, s - 1) & [n = 1,\ s = 1], \\ B_2(n, s) = B_0(n - 3s + 1, s - 1) & [n = 2,\ s = 1], \\ B_3(n, s) = B_0(n - 3s + 3, s - 2) & [n = 3,\ s = 2], \\ B_4(n, s) = B_1(n - 3s, s) + B_1(n - 3s + 2, s - 1) \\ \qquad [n = 4,\ s = 1;\ n = 5,\ s = 2], \\ B_5(n, s) = B_2(n - 3s, s) + B_2(n - 3s + 2, s - 1) \\ \qquad + B_2(n - 3s + 1, s - 1) \\ \qquad [n = 5,\ s = 1;\ n = 6,\ s = 2;\ n = 7,\ s = 2], \\ B_6(n, s) = B_1(n - 3s + 1, s - 1) + B_1(n - 3s + 3, s - 2) \\ \qquad + B_2(n - 3s + 3, s - 2) \\ \qquad [n = 6,\ s = 2;\ n = 7,\ s = 3;\ n = 8,\ s = 3]. \end{cases}$$

[7]) Hierbei ist wieder jeder durch 3 teilbare Summand doppelt zu zählen.

[8]) Diese Relationen sind den von Herrn Schur (a. a. O.[1]), S. 494) für die Größen $\psi_{3\nu+1}$, $\psi_{3\nu+2}$, $\psi_{3\nu+3}$ aufgestellten Gleichungen nachgebildet.

Es werden nun für $\nu \geqq 2$ die folgenden Formeln durch vollständige Induktion bewiesen:

$$(8)\quad B_{3\nu+1}(n,s) = B_{3\nu-3}(n-3s,s) + B_{3\nu-3}(n-3s+2,s-1) + B_{3\nu-2}(n-3s,s) + B_{3\nu-2}(n-3s+2,s-1),$$

$$(9)\quad \begin{aligned} &B_{3\nu+2}(n,s) + B_{3\nu+3}(n,s) \\ &= B_{3\nu-3}(n-3s+1,s-1) + B_{3\nu-3}(n-3s+3,s-2) \\ &+ B_{3\nu-2}(n-3s+1,s-1) + B_{3\nu-2}(n-3s+3,s-2) \\ &+ B_{3\nu-1}(n-3s,s) \qquad + B_{3\nu-1}(n-3s+2,s-1) \\ &+ B_{3\nu-1}(n-3s+1,s-1) + B_{3\nu-1}(n-3s+3,s-2). \end{aligned}$$

Es werde also vorausgesetzt, daß die Gleichungen (8) und (9) bis zu einem gewissen Werte $\nu \geqq 2$ richtig seien. Ersetzt man in der ersten der Gleichungen (5) ν durch $\nu+1$ und wendet dann die Gleichungen (7), (8), (9) an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &B_{3\nu+4}(n,s) = \sum_{\varkappa=0}^{3\nu} B_\varkappa(n-3\nu-4,s-1) + B_{3\nu+1}(n-3\nu-4,s-1) \\ &= \sum_{\varrho=0}^{3\nu-4} \{B_\varrho(n-3\nu-4-3(s-1),s-1) + B_\varrho(n-3\nu-2-3(s-1),s-2) \\ &\quad + B_\varrho(n-3\nu-3-3(s-1),s-2) + B_\varrho(n-3\nu-1-3(s-1),s-3)\} \\ &\quad + B_{3\nu-3}(n-3\nu-4-3(s-1),s-1) + B_{3\nu-3}(n-3\nu-2-3(s-1),s-2) \\ &\quad + B_{3\nu-2}(n-3\nu-4-3(s-1),s-1) + B_{3\nu-2}(n-3\nu-2-3(s-1),s-2) \\ &= \sum_{\varrho=0}^{3\nu-4} \{B_\varrho(n-3\nu-3s,s-2) \qquad + B_\varrho(n-3\nu-3s+2,s-3)\} \\ &\quad + \sum_{\sigma=0}^{3\nu-2} \{B_\sigma(n-3\nu-3s-1,s-1) + B_\sigma(n-3\nu-3s+1,s-2)\}. \end{aligned}$$

woraus nunmehr mit Rücksicht auf (5) folgt:

$$B_{3\nu+4}(n,s) = B_{3\nu}(n-3s,s) + B_{3\nu}(n-3s+2,s-1) + B_{3\nu+1}(n-3s,s) + B_{3\nu+1}(n-3s+2,s-1).$$

Gleichung (8) ist also unter der angegebenen Voraussetzung auch für $\nu+1$ richtig. Für $\nu=2$ geht sie, wie man sich leicht überlegt, in den Fällen

$$n=7,\ s=1;\quad n=8,\ s=2;\quad n=9,\ s=2;$$
$$n=11,\ s=2;\quad n=10,\ s=3;\quad n=12,\ s=3$$

in die Identität $1=1$, in allen übrigen Fällen in die Identität $0=0$ über; sie ist also für $\nu=2$ richtig und daher für alle $\nu \geqq 2$ bewiesen.

Ähnlich verläuft der Beweis von (9). Gemäß (5) ist nämlich

$$\begin{aligned}B_{3\nu+5}(n,s)+B_{3\nu+6}(n,s)&=\sum_{\lambda=0}^{3\nu+2}B_\lambda(n-3\nu-5,s-1)+\sum_{\mu=0}^{3\nu}B_\mu(n-3\nu-6,s-2)\\&\quad+B_{3\nu+1}(n-3\nu-6,s-2)+B_{3\nu+2}(n-3\nu-6,s-2),\end{aligned}$$

und da nach (6)

$$B_{3\nu+2}(n-3\nu-6,s-2)=B_{3\nu+3}(n-3\nu-5,s-1)$$

ist, so hat man

$$\begin{aligned}B_{3\nu+5}(n,s)+B_{3\nu+6}(n,s)&=\sum_{\lambda=0}^{3\nu+3}B_\lambda(n-3\nu-5,s-1)+\sum_{\mu=0}^{3\nu}B_\mu(n-3\nu-6,s-2)\\&\quad+B_{3\nu+1}(n-3\nu-6,s-2).\end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch Anwendung der bis ν als richtig vorausgesetzten Gleichungen (8), (9) und der Gleichungen (7):

$$\begin{aligned}&B_{3\nu+5}(n,s)+B_{3\nu+6}(n,s)\\&=\sum_{\sigma=0}^{3\nu-1}\{B_\sigma(n-3\nu-5-3(s-1),s-1)+B_\sigma(n-3\nu-3-3(s-1),s-2)\\&\quad+B_\sigma(n-3\nu-4-3(s-1),s-2)+B_\sigma(n-3\nu-2-3(s-1),s-3)\}\\&\quad+\sum_{\varrho=0}^{3\nu-4}\{B_\varrho(n-3\nu-6-3(s-2),s-2)+B_\varrho(n-3\nu-4-3(s-2),s-3)\\&\quad+B_\varrho(n-3\nu-5-3(s-2),s-3)+B_\varrho(n-3\nu-3-3(s-2),s-4)\}\\&\quad+B_{3\nu-3}(n-3\nu-6-3(s-2),s-2)+B_{3\nu-3}(n-3\nu-4-3(s-2),s-3)\\&\quad+B_{3\nu-2}(n-3\nu-6-3(s-2),s-2)+B_{3\nu-2}(n-3\nu-4-3(s-2),s-3)\\&=\sum_{\varrho=0}^{3\nu-4}\{B_\varrho(n-3\nu-3s+1,s-3)\quad+B_\varrho(n-3\nu-3s+3,s-4)\}\\&\quad+\sum_{\tau=0}^{3\nu-2}\{B_\tau(n-3\nu-3s,s-2)\quad+B_\tau(n-3\nu-3s+2,s-3)\}\\&\quad+\sum_{\sigma=0}^{3\nu-1}\{B_\sigma(n-3\nu-3s-2,s-1)+B_\sigma(n-3\nu-3s,s-2)\\&\quad+B_\sigma(n-3\nu-3s-1,s-2)\quad+B_\sigma(n-3\nu-3s+1,s-3)\},\end{aligned}$$

woraus sich nun mit Benutzung von (5) ergibt:

$$\begin{aligned}B_{3\nu+5}(n,s)+B_{3\nu+6}(n,s)&=B_{3\nu}(n-3s+1,s-1)+B_{3\nu}(n-3s+3,s-2)\\&\quad+B_{3\nu+1}(n-3s+1,s-1)+B_{3\nu+1}(n-3s+3,s-2)\\&\quad+B_{3\nu+2}(n-3s,s)\quad+B_{3\nu+2}(n-3s+2,s-1)\\&\quad+B_{3\nu+2}(n-3s+1,s-1)+B_{3\nu+2}(n-3s+3,s-2).\end{aligned}$$

Gleichung (9) gilt also, falls sie bis ν richtig ist, auch für $\nu+1$. Da sie für $\nu=2$ für die Wertepaare

$$n=9, s=2;\ n=11, s=3;\ n=13, s=3;\ n=14, s=3$$

in die Identität $2=2$ und für die Wertepaare

$$n=8,\ s=1;\ n=10, s=2;\ n=12, s=2;\ n=13, s=2;$$
$$n=10, s=3;\ n=15, s=3;\ n=12, s=4;\ n=14, s=4;$$
$$n=15, s=4;\ n=16, s=4$$

in die Identität $1=1$, in allen übrigen Fällen aber in die Identität $0=0$ übergeht, so ist auch Gleichung (9) für alle $\nu \geqq 2$ bewiesen.

Sei nun N irgendeine oberhalb n liegende, durch 3 teilbare Zahl, so ergibt sich aus (7), (8), (9):

$$\sum_{\varkappa=0}^{N} B_\varkappa(n,s) = \sum_{\lambda=0}^{N-4} \{B_\lambda(n-3s,s) + B_\lambda(n-3s+2,s-1) + B_\lambda(n-3s+1,s-1) + B_\lambda(n-3s+3,s-2)\}, \tag{10}$$

und da jedenfalls die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=0}^{N} B_\varkappa(n,s) = B(n,s),$$
$$\sum_{\lambda=0}^{N-4} B_\lambda(n-3s,s) = B(n-3s,s),$$
$$\sum_{\lambda=0}^{N-4} B_\lambda(n-3s+2,s-1) = B(n-3s+2,s-1),$$
$$\sum_{\lambda=0}^{N-4} B_\lambda(n-3s+1,s-1) = B(n-3s+1,s-1),$$
$$\sum_{\lambda=0}^{N-4} B_\lambda(n-3s+3,s-2) = B(n-3s+3,s-2)$$

bestehen, so erschließt man aus (10) die Rekursionsformel (4).

§ 3.

Beweis der Gleichung (2) und ihrer Verallgemeinerung.

Nachdem nun gezeigt ist, daß die Größen $A(n,s)$ und $B(n,s)$ derselben Rekursionsformel genügen, läßt sich Gleichung (2) durch vollständige Induktion beweisen.

Für alle Werte von n bzw. s bestehen offenbar die Gleichungen

$$A(n,1) = B(n,1), \tag{11}$$

$$A(1,s) = B(1,s). \tag{12}$$

Die Gleichung (2) sei nun richtig für $s \leqq s_0$ und beliebige Werte von n und außerdem für $s = s_0 + 1$ und $n \leqq n_0$. Dann zeigen die Formeln (3) und (4), daß auch

$$A(n_0 + 1, s_0 + 1) = B(n_0 + 1, s_0 + 1)$$

gilt, und durch Fortsetzung dieses Schlusses findet man, daß Gleichung (2) auch für $s = s_0 + 1$ und beliebige Werte von n besteht. Wegen (12) gilt aber auch

$$A(1, s_0 + 2) = B(1, s_0 + 2);$$

man schließt daher auf Grund von (3) und (4) weiter, daß Gleichung (2) auch für $s = s_0 + 2$ richtig ist usf. Aus der Voraussetzung, daß die Gleichung (2) für $s \leqq s_0$ und beliebige Werte von n und außerdem für $s = s_0 + 1$ und $n \leqq n_0$ bewiesen sei, folgt demnach, daß sie für alle Wertepaare n, s gilt. Da sie nun wegen (11) und (12) für $s = 1$ und beliebige Werte von n und außerdem für $s = 2$ und $n = 1$ erfüllt ist, so ist sie nunmehr allgemein bewiesen.

Der im vorstehenden für Satz I erbrachte arithmetische Beweis beruht ganz wesentlich auf der Möglichkeit, den Satz I mit Hilfe von II′ durch Satz I′ zu ersetzen; erst dieser Satz läßt die schärfere Formulierung zu, die sich in dem Satze V ausdrückt. Aus diesem Grunde ist es nicht möglich, die hier benutzte Methode zum Beweise der Sätze III und IV zu verwenden, da sich für diese Sätze ein entsprechender Übergang, wie er hier von Satz I zu I′ erfolgte, nicht angeben läßt. Die zur Anwendung des Satzes II′ benutzte Teilbarkeitseigenschaft der Zahlen von der Form $6x \pm 1$ macht also den neuen von Herrn Schur entdeckten Satz mit einfacheren Hilfsmitteln zugänglich als seine früheren Sätze III und IV.

Herrn Schur gelang es durch eine Modifikation seines Beweises von Satz I, folgende weitgehende Verallgemeinerung dieses Satzes zu beweisen[9]):

VI. *Ist* $k \geqq 3$ *eine positive ganze Zahl,* α *eine positive ganze Zahl unterhalb* $\frac{k}{2}$, *und versteht man unter* β *die Differenz* $k - \alpha$, *so wird die Anzahl der Zerlegungen einer beliebigen Zahl* n *in voneinander verschiedene Summanden der Form* $k\nu + \alpha$, $k\nu + \beta$ *gleich der Anzahl der Zerlegungen*

$$n = b_1 + b_2 + \ldots + b_r \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

in Summanden der Form $k\nu + \alpha$, $k\nu + \beta$ *oder* $k\nu$, *wenn noch verlangt wird, daß für* $r > 1$ *jede Differenz* $b_\varrho - b_{\varrho+1}$ *mindestens gleich* k *und, falls* b_ϱ *und* $b_{\varrho+1}$ *durch* k *teilbar sind, mindestens gleich* $2k$ *sein soll*[10]).

[9]) A. a. O. [1]), S. 495.

[10]) Für $k = 3$, $\alpha = 1$ geht dieser Satz ersichtlich in I′, also in I über.

Auch der Beweis dieses Satzes läßt sich mit den gleichen elementaren Hilfsmitteln durchführen, die oben zum Beweise von I ausreichten. Behält man die vorher gebrauchten Bezeichnungen auch für die allgemeinen Zerlegungen des Satzes VI bei, so daß Gleichung (1) nunmehr den Satz VI zum Ausdruck bringt, so gilt auch dieser Satz in der durch Gleichung (2) dargestellten präzisen Fassung, wobei aber zu beachten ist, daß bei der Feststellung der Summandenzahl s einer Zerlegung jetzt *jeder durch k teilbare Summand doppelt* zu zählen ist. Der Beweis von VI verläuft vollständig analog dem des Satzes I. Deshalb kann ich mich darauf beschränken, im folgenden lediglich die für den Beweis von VI in Betracht kommenden Verallgemeinerungen der Gleichungen (3) bis (9) anzugeben:

$$(3') \quad \begin{aligned} A(n,s) = {} & A(n-ks,s) + A(n-ks+\beta, s-1) \\ & + A(n-ks+\alpha, s-1) + A(n-ks+k, s-2); \end{aligned}$$

$$(4') \quad \begin{aligned} B(n,s) = {} & B(n-ks,s) + B(n-ks+\beta, s-1) \\ & + B(n-ks+\alpha, s-1) + B(n-ks+k, s-2); \end{aligned}$$

$$(5') \quad \begin{cases} B_{k\nu+\alpha}(n,s) = \sum_{\varkappa=0}^{k\nu-\beta} B_\varkappa(n-k\nu-\alpha, s-1), \\ B_{k\nu+\beta}(n,s) = \sum_{\lambda=0}^{k\nu-\alpha} B_\lambda(n-k\nu-\beta, s-1), \\ B_{k\nu+k}(n,s) = \sum_{\lambda=0}^{k\nu-\alpha} B_\lambda(n-k\nu-k, s-2); \end{cases}$$

$$(6') \quad B_{k\nu+k}(n,s) = B_{k\nu+\beta}(n-\alpha, s-1);$$

$$(7') \quad \begin{cases} B_0(n,s) = B_0(n-ks,s) & [n=0, s=0], \\ B_\alpha(n,s) = B_0(n-ks+\beta, s-1) & [n=\alpha, s=1], \\ B_\beta(n,s) = B_0(n-ks+\alpha, s-1) & [n=\beta, s=1], \\ B_k(n,s) = B_0(n-ks+k, s-2) & [n=k, s=2], \\ B_{k+\alpha}(n,s) = B_\alpha(n-ks,s) + B_\alpha(n-ks+\beta, s-1) & \\ \qquad [n=k+\alpha, s=1;\ n=k+2\alpha, s=2], & \\ B_{k+\beta}(n,s) = B_\beta(n-ks,s) + B_\beta(n-ks+\beta, s-1) & \\ \qquad + B_\beta(n-ks+\alpha, s-1) & \\ \qquad [n=k+\beta, s=1;\ n=2k, s=2;\ n=k+2\beta, s=2], & \\ B_{2k}(n,s) = B_\alpha(n-ks+\alpha, s-1) + B_\alpha(n-ks+k, s-2) & \\ \qquad + B_\beta(n-ks+k, s-2) & \\ \qquad [n=2k, s=2;\ n=2k+\alpha, s=3;\ n=2k+\beta, s=3]; & \end{cases}$$

$$(8') \quad \begin{aligned} B_{k\nu+\alpha}(n, s) = {} & B_{k\nu-k}(n - ks, s) + B_{k\nu-k}(n - ks + \beta, s - 1) \\ & + B_{k\nu-\beta}(n - ks, s) + B_{k\nu-\beta}(n - ks + \beta, s - 1); \end{aligned}$$

$$(9') \quad \begin{aligned} & B_{k\nu+\beta}(n, s) + B_{k\nu+k}(n, s) \\ & = B_{k\nu-k}(n - ks + \alpha, s - 1) + B_{k\nu-k}(n - ks + k, s - 2) \\ & + B_{k\nu-\beta}(n - ks + \alpha, s - 1) + B_{k\nu-\beta}(n - ks + k, s - 2) \\ & + B_{k\nu-\alpha}(n - ks, s) \qquad + B_{k\nu-\alpha}(n - ks + \beta, s - 1) \\ & + B_{k\nu-\alpha}(n - ks + \alpha, s - 1) + B_{k\nu-\alpha}(n - ks + k, s - 2). \end{aligned}$$

(Eingegangen am 9. Juni 1927.)

Über einen Satz von Besicovitsch.

Von

Oskar Perron in München.

In Band 27 der Math. Zeitschrift hat Herr Besicovitsch den überraschenden Satz bewiesen, daß es ebene Figuren mit beliebig kleinem Flächeninhalt gibt, in denen eine Strecke fester Länge (Stab) sich um 360° herumdrehen und dabei in die Ausgangslage zurückkehren kann. Der Beweis ergibt sich dort in wenigen Zeilen aus dem folgenden Hilfssatz:

Wenn man ein Dreieck mit der Basis a und der Spitze A durch Transversalen aus A in n gleiche Teildreiecke zerschneidet und diese durch Parallelverschiebung in Richtung der Basis a teilweise übereinanderlegt, so kann man es durch geeignete Wahl der Zahl n und der Größe der Parallelverschiebungen erreichen, daß die gesamte bedeckte Fläche einen beliebig kleinen Inhalt hat.

Herrn Besicovitschs Beweis dieses merkwürdigen Hilfssatzes ist ziemlich verzwickt und für die Anschauung nicht ganz leicht; ich möchte daher einen einfacheren und anschaulicheren Beweis hier mitteilen.

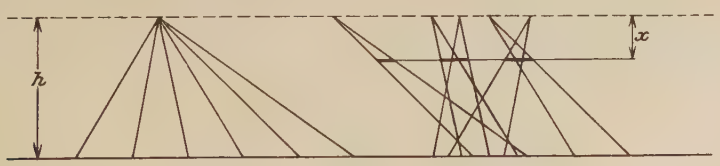


Fig. 1.

Hat man das Dreieck in eine Anzahl, z. B. 5 gleiche Teile zerschnitten und diese durch Parallelverschiebung teilweise aufeinandergelegt (Fig. 1), so schneidet eine im Abstand x von der Dreiecksspitze gezogene Parallele zur Basis aus der bedeckten Fläche ein oder mehrere Intervalle aus (in der Fig. 1 etwas dicker ausgezeichnet). Die Gesamtlänge dieser Intervalle ist eine Funktion von x, die die *Querfunktion* heißen und mit $Q(x)$ bezeichnet werden soll. Der Inhalt der bedeckten Fläche ist dann

$$\int_0^h Q(x)\,dx,$$

wobei h die Höhe des Dreiecks bedeutet. Der Satz wird daher bewiesen sein, wenn sich zeigen läßt, daß nach Vorgabe einer beliebig kleinen Zahl ε die Anzahl n und die Parallelverschiebungen so gewählt werden können, daß im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq h$ die Querfunktion $Q(x)$ kleiner als εa wird.

Zu dem Zweck nehmen wir eine ganze Zahl m so groß an, daß

$$\frac{2}{m+2} < \varepsilon \tag{1}$$

ist und wählen für n die Zahl

$$n = 2^m. \tag{2}$$

Ferner setzen wir

$$\frac{(\mu+1)\,h}{m+2} = x_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Solange die 2^m Teildreiecke noch nicht verschoben sind, ist die Querfunktion

$$Q_0(x) = \frac{ax}{h}; \tag{4}$$

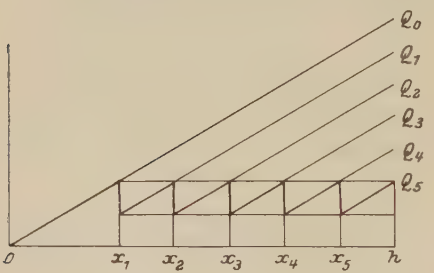


Fig. 2.

ihr graphisches Bild ist eine Gerade und in Fig. 2 dargestellt. Jetzt numiereren wir die 2^m Teildreiecke von links nach rechts durch und schieben jedes Dreieck mit gerader Nummer so weit auf seinen linken Nachbar, daß auf dem Querschnitt im Abstand x_1 von der Spitze genaue Deckung stattfindet. Dadurch werden die 2^m Teildreiecke zu 2^{m-1} Teilfiguren verschmolzen, die sich oberhalb

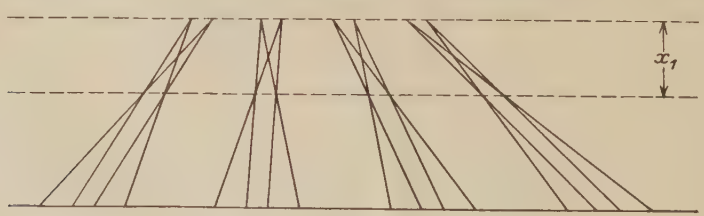


Fig. 3.

des genannten Querschnitts noch teilweise überdecken; wir schieben sie so weit auseinander, daß sie ganz getrennt liegen (Fig. 3). Nach diesen Verschiebungen wird die Querfunktion für $x < x_1$ gewiß nicht vergrößert und

für $x \geqq x_1$ genau um $\frac{1}{2} Q_0(x_1)$ verkleinert sein; für die neue Querfunktion $Q_1(x)$ gilt also:

$$(5) \qquad Q_1(x) \begin{cases} \leqq Q_0(x) & \text{für } x < x_1, \\ = Q_0(x) - \frac{1}{2} Q_0(x_1) & \text{für } x \geqq x_1. \end{cases}$$

Für $x \geqq x_1$ ist das graphische Bild von $Q_1(x)$ eine zum Bild von $Q_0(x)$ parallele Gerade und in Fig. 2 ebenfalls dargestellt.

Jetzt numerieren wir die 2^{m-1} Teilfiguren wieder von links nach rechts durch und schieben jede Figur mit gerader Nummer soweit auf ihren linken Nachbar, daß auf dem Querschnitt im Abstand x_2 von der Spitze genaue Deckung stattfindet; die so entstehenden 2^{m-2} Teilfigureu schieben wir dann nötigenfalls so weit auseinander, daß sie ganz getrennt liegen. Nach diesen Verschiebungen wird die Querfunktion für $x < x_2$ gewiß nicht vergrößert und für $x \geqq x_2$ genau um $\frac{1}{2} Q_1(x_2)$ verkleinert sein. Für die neue Querfunktion $Q_2(x)$ gilt also:

$$(6) \qquad Q_2(x) \begin{cases} \leqq Q_1(x) & \text{für } x < x_2, \\ = Q_1(x) - \frac{1}{2} Q_1(x_2) & \text{für } x \geqq x_2. \end{cases}$$

Für $x \geqq x_2$ ist das graphische Bild von $Q_2(x)$ eine zu den Bildern von $Q_0(x)$ und $Q_1(x)$ parallele Gerade und in Fig. 2 ebenfalls dargestellt.

Jetzt numerieren wir die 2^{m-2} Teilfiguren abermals von links nach rechts durch und schieben jede Figur mit gerader Nummer so weit auf ihren linken Nachbar, daß auf dem Querschnitt im Abstand x_3 von der Spitze genaue Deckung stattfindet; die so entstehenden Teilfiguren schieben wir dann nötigenfalls wieder so weit auseinander, daß sie ganz getrennt liegen. Nach diesen Verschiebungen wird die Querfunktion für $x < x_3$ gewiß nicht vergrößert und für $x \geqq x_3$ genau um $\frac{1}{2} Q_2(x_3)$ verkleinert sein. Für die neue Querfunktion $Q_3(x)$ gilt also:

$$(7) \qquad Q_3(x) \begin{cases} \leqq Q_2(x) & \text{für } x < x_3, \\ = Q_2(x) - \frac{1}{2} Q_2(x_3) & \text{für } x \geqq x_3. \end{cases}$$

So fortfahrend werden wir allgemein nach der μ^{ten} Operation noch $2^{m-\mu}$ getrennte Teilfiguren haben und für die Querfunktion $Q_\mu(x)$ wird gelten:

$$(8) \qquad Q_\mu(x) \begin{cases} \leqq Q_{\mu-1}(x) & \text{für } x < x_\mu, \\ = Q_{\mu-1}(x) - \frac{1}{2} Q_{\mu-1}(x_\mu) & \text{für } x \geqq x_\mu. \end{cases}$$

Nach m Operationen haben wir nur noch *eine* Figur und das graphische Bild der Querfunktion $Q_m(x)$ kommt nach den Ungleichungen (8) nirgends über die in Fig. 2 (wo $m = 5$ gewählt ist) etwas dicker ausgezeichnete Zackenlinie hinaus. Es ist also

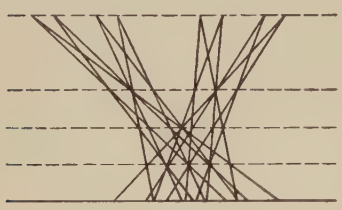


Fig. 4.

$$(9) \quad Q_m(x) \leqq Q_0(x_1) \; (= Q_{\mu-1}(x_\mu)) = \frac{a\,x_1}{h} = \frac{2\,a}{m+2} < \varepsilon a .$$

In Fig. 4 ist die Schlußfigur dargestellt, wobei $m = 3$, also $n = 8$ gewählt ist. Eine etwas genauere Analyse liefert sogar den exakten Wert von $Q_m(x)$, und zwar

$$Q_m(x) = \begin{cases} \dfrac{a\,x}{h} & \text{für } 0 \leqq x \leqq \dfrac{h}{m+2}, \\ \dfrac{a}{m+2} & \text{für } \dfrac{h}{m+2} \leqq x \leqq \dfrac{(m+1)\,h}{m+2}, \\ a\left(\dfrac{x}{h} - \dfrac{m}{m+2}\right) & \text{für } \dfrac{(m+1)\,h}{m+2} \leqq x \leqq h, \end{cases}$$

so daß der wahre Flächeninhalt der Schlußfigur gleich

$$\frac{a\,h}{2(m+2)^2} + \frac{m\,a\,h}{(m+2)^2} + \frac{3\,a\,h}{2(m+2)^2} = \frac{a\,h}{m+2}$$

ist. Das läßt sich auch leicht an Fig. 4 bestätigen; für den Beweis unseres Satzes ist es aber unerheblich.

(Eingegangen am 11. November 1927.)

Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik.

Dritte Abhandlung[1]).

Permanente Bewegungen einer homogenen inkompressiblen, zähen Flüssigkeit.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

In zwei vor nicht langer Zeit erschienenen Arbeiten hat Herr Crudeli eine elegante Lösung des Problems unendlich langsamer permanenter Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit gegeben[2]). Herr Crudeli bedient sich eines, in geeigneter Weise modifizierten, Verfahrens, das ich früher in Weiterführung eines älteren Gedankens von Herrn Tedone zur Auflösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie vorgeschlagen hatte[3]), und gelangt zu einer Fredholmschen Integralgleichung, die eine Nullösung hat. In dem besonderen Falle einer einen Kugelkörper füllenden Flüssigkeit zeigt Herr Crudeli, daß die bekannte, für die Lösbarkeit der Integralgleichung notwendige und hinreichende Bedingung vermöge der Inkompressibilität der Flüssigkeit erfüllt ist.

In der vorliegenden Arbeit werden langsame, indessen *nicht* unendlich langsame permanente Bewegungen einer ein ganz im Endlichen befindliches Gefäß voll erfüllenden unzusammendrückbaren, zähen Flüssigkeit betrachtet. Die Differentialgleichungen werden also nicht durch Vernach-

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener unzusammendrückbarer reibungsloser Flüssigkeiten nnd die Helmholtzschen Wirbelsätze, Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 89–154; S. 309–316; Zweite Abhandlung, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 196–323. Zum Verständnis der folgenden Ausführungen ist die Kenntnis der beiden ersten Abhandlungen nicht erforderlich.

[2]) Vgl. U. Crudeli, Metodo di risoluzione di un problema fondamentale nella teoria del moto lento stazionario dei liquidi viscosi, Rendiconti delle R. Accademia Nazionale dei Lincei (6) **2** (1925), S. 247–291; Sopra un problema fondamentale nella teoria del moto lento stazionario dei liquidi viscosi, Rivista di Matematica e Fisica (Circolo Matematico-Fisico di Messina) 1925, 9 Seiten.

[3]) Vgl. L. Lichtenstein, Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie, Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 21–28.

lässigung der Glieder höherer Ordnung vereinfacht, man gelangt darum zu einer strengen Lösung des Problems. Des weiteren wird gezeigt, daß die von Herrn Crudeli aufgestellte Integralgleichung stets, also auch wenn es sich nicht um einen Kugelkörper handelt, lösbar ist.

Inhaltsübersicht.

§ 1. Problemstellung. Die fundamentalen nichtlinearen Integro-Differentialgleichungen.
§ 2. Vorbereitende Betrachtungen. Unendlich langsame permanente Bewegung.
§ 3. Sukzessive Approximationen.
Anhang.

§ 1.

Problemstellung. Die fundamentalen Integro-Differentialgleichungen.

Es sei eine in einem ganz im Endlichen befindlichen starren Gefäß eingeschlossene und dieses lückenlos erfüllende Masse einer inkompressiblen, mit innerer Reibung behafteten Flüssigkeit, in die auch feste Körper eingetaucht sein können, vorgelegt. Die Innenwand des Gefäßes sowie die Oberfläche etwaiger eingetauchter Körper mögen aus geschlossenen analytischen und regulären Flächen bestehen. Wir bezeichnen, wie üblich, mit u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit, mit ϱ die als konstant vorausgesetzte Dichte, mit X, Y, Z die Komponenten der Einheitskräfte, d. h. der Kräfte für die Masseneinheit, mit p den Druck, μ den Reibungskoeffizienten. Es handelt sich um eine permanente Flüssigkeitsbewegung, — das von der Flüssigkeit besetzte Gebiet ändert sich demnach nicht mit der Zeit. Entweder hat man sich also das Gefäß und die eingetauchten Körper als im Raume festgehalten vorzustellen, oder aber sie sind von Rotationsflächen begrenzt und können in gleichförmiger Rotation begriffen sein.

Die Differentialgleichungen der Bewegung, die wir uns auf ein im Raume festes Achsenkreuz bezogen denken, schreiben wir in der Form

$$(1)\qquad \begin{aligned} -\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} + \nu \Delta u + X &= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},\\ -\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} + \nu \Delta v + Y &= u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},\\ -\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} + \nu \Delta w + Z &= u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{1}{\varrho} p, \qquad \nu = \frac{1}{\varrho}\mu.$$

Setzt man, wie wir es tun wollen, voraus, daß die Flüssigkeit an starren Körpern haftet, so sind die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w am

Rande als bekannt anzusehen. Sie sind entweder gleich Null oder haben bestimmte, leicht explizite anzugebende Werte. Mit Rücksicht auf spätere Betrachtungen nehmen wir allgemeiner an, daß die Funktionen u, v, w folgende Eigenschaften haben. Sie sind in dem von der Flüssigkeit besetzten Bereiche $T+S$ stetig und haben in T stetige partielle Ableitungen der drei ersten Ordnungen. Bei der Annäherung an S gehen u, v, w in vorgeschriebene Ortsfunktionen $\varphi(\sigma)$, $\psi(\sigma)$, $\chi(\sigma)$ über; φ, ψ, χ sind stetig, haben, als Funktionen geeigneter Gaußscher Parameter der Fläche[4]) aufgefaßt, stetige Ableitungen erster sowie stetige, eine Höldersche Bedingung, kürzer eine H-Bedingung erfüllende Ableitungen zweiter Ordnung und genügen der Gleichung

$$(3) \qquad \int_S (\varphi \cos(n, x) + \psi \cos(n, y) + \chi \cos(n, z))\, d\sigma = 0.$$

In (3) bezeichnet (n) die Innennormale zu S im Punkte $(x, y, z) = \sigma$ auf S.

Die Gleichung (3) ist gewiß erfüllt, wenn die Hülle und die eingetauchten starren Körper ruhen oder von Umdrehungsflächen begrenzt sind und um die Achse rotieren.

Die Komponenten der Einheitskraft X, Y, Z sind in $T+S$ stetig und haben daselbst stetige Ableitungen erster sowie stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung. Wir werden weiter unten den Funktionen φ, ψ, χ; X, Y, Z gewisse Ungleichheiten auferlegen (vgl. die Formeln (106) auf S. 411), durch die zum Ausdruck gebracht wird, daß es sich um langsame (freilich *endliche*) Bewegungen handelt.

Was schließlich den Druck p betrifft, so wird festgesetzt, daß p in $T+S$ stetig ist, in T stetige Ableitungen erster, sowie stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung besitzt und in einem beliebig gewählten, dann aber festzuhaltenden Punkte auf S einen vorgeschriebenen Wert hat. Wie sich alsbald zeigen wird, folgt hieraus, daß $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ in $T+S$ stetig sind und daselbst eine H-Bedingung erfüllen.

Aus (1) und (2) folgt durch Differentiation nach einer leichten Umformung für alle (x, y, z) in T

$$(4) \qquad \Delta p = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} - \Pi,$$

$$(5) \qquad \Pi = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

---

[4]) Bekanntlich läßt sich S in eine endliche Anzahl Teile zerlegen, so daß in jedem einzelnen dieser Teile entweder z eine analytische und reguläre Funktion von x und y ist, oder x eine ebensolche Funktion von y oder z oder y von x und z darstellt. Als geeignete Gaußsche Parameter im Sinne des Textes sind dementsprechend x und y oder aber y, z oder x, z aufzufassen.

Für (1) kann man, wie sich leicht verifizieren läßt, mit Rücksicht auf (4) und (5) auch schreiben

$$
\begin{aligned}
&X+\frac{1}{2}x\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}-\Pi\right)+\Delta\left(\nu u-\frac{1}{2}x\,\boldsymbol{p}\right)=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},\\
(6)\quad &Y+\frac{1}{2}y\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}-\Pi\right)+\Delta\left(\nu v-\frac{1}{2}y\,\boldsymbol{p}\right)=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},\\
&Z+\frac{1}{2}z\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}-\Pi\right)+\Delta\left(\nu w-\frac{1}{2}z\,\boldsymbol{p}\right)=u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z},
\end{aligned}
$$

und darum, unter $G(\tau,\tau')\equiv G(x,y,z;x',y',z')$ die zu T gehörige klassische Greensche Funktion verstehend,

$$
\begin{aligned}
4\pi\left(\nu u-\frac{1}{2}x\,\boldsymbol{p}\right)=&\int_T G(\tau,\tau')\left(X'+\frac{1}{2}x'\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}-\Pi'\right)\right.\\
&\left.-\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}+w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right)\right)d\tau'\\
&+\nu\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,u'\,d\sigma'-\frac{1}{2}\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,x'\,\boldsymbol{p}'\,d\sigma',\\
(7^*)\quad 4\pi\left(\nu v-\frac{1}{2}y\,\boldsymbol{p}\right)=&\int_T G(\tau,\tau')\left(Y'+\frac{1}{2}y'\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}-\Pi'\right)\right.\\
&\left.\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}+w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right)\right)d\tau'\\
&+\nu\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,v'\,d\sigma'-\frac{1}{2}\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,y'\,\boldsymbol{p}'\,d\sigma',\\
4\pi\left(\nu w-\frac{1}{2}z\,\boldsymbol{p}\right)=&\int_T G(\tau,\tau')\left(Z'+\frac{1}{2}z'\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}-\Pi'\right)\right.\\
&\left.-\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x'}+v'\frac{\partial w'}{\partial y'}+w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\right)d\tau'\\
&+\nu\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,w'\,d\sigma'-\frac{1}{2}\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,z'\,\boldsymbol{p}'\,d\sigma'.
\end{aligned}
$$

Das Symbol $\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')$ bezeichnet die Ableitung in der Richtung der Innennormale im Punkte $\sigma'=(x',y',z')$ auf S. Zur Abkürzung ist in (7) für $\Pi(x',y',z')$, $X(x',y',z)$, ... entsprechend Π', X', ... geschrieben worden.

Aus (4) folgt weiter

$$
(7^*)\quad 4\pi\,\boldsymbol{p}=-\int_T G(\tau,\tau')\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}-\Pi'\right)d\tau'+\int_S\boldsymbol{p}'\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,d\sigma
$$

darum

$$
(8)\quad 4\pi\,x\,\boldsymbol{p}=-\int_T G(\tau,\tau')\,x\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}-\Pi'\right)d\tau'+\int_S x\,\boldsymbol{p}'\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,d\sigma
$$

Aus dieser Gleichung und aus der ersten der Gleichungen (7) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
u = {} & \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\, u'\, d\sigma' + \frac{1}{8\pi\nu}\int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\, \boldsymbol{p}'(x-x')\, d\sigma' \\
& + \frac{1}{8\pi\nu}\int_T G(\tau,\tau')\Big\{2X' + (x'-x)\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi'\Big) \\
& - 2\Big(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\Big)\Big\}\, d\tau'. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

In ähnlicher Weise gewinnt man die hierzu analogen Formeln

$$
\begin{aligned}
v = {} & \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\, v'\, d\sigma' + \frac{1}{8\pi\nu}\int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\, \boldsymbol{p}'(y-y')\, d\sigma' \\
& + \frac{1}{8\pi\nu}\int_T G(\tau,\tau')\Big\{2Y' + (y'-y)\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi'\Big) \\
& - 2\Big(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\Big)\Big\}\, d\tau' \qquad (10)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
w = {} & \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\, w'\, d\sigma' + \frac{1}{8\pi\nu}\int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\, \boldsymbol{p}'(z-z')\, d\sigma' \\
& + \frac{1}{8\pi\nu}\int_T G(\tau,\tau')\Big\{2Z' + (z'-z)\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi'\Big) \\
& - 2\Big(u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\Big)\Big\}\, d\tau'. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Aus (9), (10), (11) und (2) erhält man durch Differentiieren und Zusammenfassung

$$
\begin{aligned}
& 2\nu\int_S \Big(u'\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial x\,\partial n'} + v'\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'} + w'\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'}\Big)\, d\sigma' + \int_S \boldsymbol{p}'\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big((x-x')\frac{\partial G(\sigma,\sigma')}{\partial n'}\Big) \\
& \qquad + \frac{\partial}{\partial y}\Big((y-y')\frac{\partial G}{\partial n'}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big((z-z')\frac{\partial G}{\partial n'}\Big)\Big\}\, d\sigma' \\
& + 2\int_T \Big\{\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x}\Big(X' - u'\frac{\partial u'}{\partial x'} - v'\frac{\partial u'}{\partial y'} - w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\Big) \\
& + \frac{\partial G}{\partial y}\Big(Y' - u'\frac{\partial v}{\partial x'} - v'\frac{\partial v'}{\partial y'} - w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\Big) + \frac{\partial G}{\partial z}\Big(Z' - u'\frac{\partial w'}{\partial x'} - v'\frac{\partial w'}{\partial y'} - w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\Big)\Big\}\, d\tau' \\
& \qquad + \int_T \Big\{\frac{\partial}{\partial x}(G(\tau,\tau')(x'-x)) + \frac{\partial}{\partial y}(G(y'-y)) \\
& + \frac{\partial}{\partial z}(G(z'-z))\Big\}\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi'\Big)\, d\tau' = 8\pi\nu\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

Es gilt nun

$$(13)\quad \frac{\partial}{\partial x}\Big((x-x')\frac{\partial G}{\partial n'}\Big)+\ldots = 3\frac{\partial G}{\partial n'}+(x-x')\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial n'}+(y-y')\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'} + (z-z')\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'},$$

sowie

$$(14)\quad \frac{\partial}{\partial x}(G(x'-x))+\ldots = -3G+(x'-x)\frac{\partial G}{\partial x}+(y'-y)\frac{\partial G}{\partial y} + (z'-z)\frac{\partial G}{\partial z}.$$

Beachtet man diese Beziehungen, sowie die Gleichung (7*), so gewinnt man aus (12) die weitere Formel

$$12\pi p + 2\nu\int_S \Big(u'\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial x\,\partial n'} + v'\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'}+w'\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'}\Big)\,d\sigma'$$

$$+\int_S p'\Big((x-x')\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial x\,\partial n'}+(y-y')\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'}+(z-z')\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'}\Big)\,d\sigma'$$

$$(15)\quad +2\int_T\Big\{\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x}\Big(X'-u'\frac{\partial u'}{\partial x'}-v'\frac{\partial u'}{\partial y'}-w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\Big) + \frac{\partial G}{\partial y}\Big(Y'-u'\frac{\partial v'}{\partial x'}-v'\frac{\partial v'}{\partial y'}-w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\Big)+\ldots\Big\}\,d\tau'$$

$$+\int_T\Big\{(x'-x)\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x}+(y'-y)\frac{\partial G}{\partial y}+\ldots\Big\}\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}-\Pi'\Big)\,d\tau'=0.$$

Der erste Integralausdruck links ist, wie man leicht sieht, gleich

$$(16)\quad 8\pi\nu\Big(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\Big),$$

unter U, V, W diejenigen in T regulären Potentialfunktionen verstanden, die auf S entsprechend die Werte φ, ψ, χ annehmen. Im vorliegenden Falle ist der Ausdruck (16) in $T+S$ vorhanden und stetig und hat daselbst stetige, eine H-Bedingung erfüllende partielle Ableitungen erster Ordnung.

Lassen wir jetzt den Punkt (x, y, z) gegen einen Punkt $\sigma^*=(x^*, y^*, z^*)$ auf S konvergieren.

Bezeichnet man zur Abkürzung den von τ nach σ' hinweisenden Vektor, ebenso wie seinen Betrag, mit $\mathfrak{r}$, so findet man wegen

$$(17)\quad (x-x')\frac{\partial}{\partial x}+(y-y')\frac{\partial}{\partial y}+(z-z')\frac{\partial}{\partial z}=-\mathfrak{r}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}$$
$$(\mathfrak{r}^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)$$

für den zweiten Integralausdruck in (15) den Wert

$$(18)\quad -\int_S p'\mathfrak{r}\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial \mathfrak{r}\,\partial n'}\,d\sigma'.$$

Um das Verhalten der Funktion $\mathfrak{r}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}\,\partial n'}$ übersichtlich darzustellen, bedienen wir uns vorübergehend mit Herrn P. Lévy eines kartesischen Koordinatensystems $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, dessen positive $\mathfrak{z}$-Achse die Richtung der Innennormale (n') im Punkte σ' hat, während die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achsen die Krümmungslinien in σ' berühren[5]). Die Gleichung von S kann man in einer gewissen Umgebung von σ' in der Form

$$(19)\quad \mathfrak{z} = \frac{1}{2}(a_1 \mathfrak{x}^2 + a_2 \mathfrak{y}^2) + \frac{1}{6}(b_0 \mathfrak{x}^3 + b_1 \mathfrak{x}^2 \mathfrak{y} + b_2 \mathfrak{x}\,\mathfrak{y}^2 + b_3 \mathfrak{y}^3) + \dots$$

darstellen; $\frac{1}{a_1}$ und $\frac{1}{a_2}$ sind die Hauptkrümmungsradien in σ'. Dann gilt nach Herrn P. Lévy

$$(20)\quad \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z};\ \sigma') = \frac{2\,\mathfrak{z}}{\mathfrak{r}^3} - \frac{a_1 + a_2}{2}\frac{1}{\mathfrak{r}} - \frac{a_1 - a_2}{2}\frac{\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2}{\mathfrak{r}(\mathfrak{r} + \mathfrak{z})^2} + Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z};\ \sigma')$$
$$(\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2).$$

Die Funktion Q hat, außer in σ' selbst, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Diese werden bei der Annäherung an σ' wie $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ unendlich.

Für

$$(21)\quad \mathfrak{r}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}\,\partial n'} = \mathfrak{r}\frac{\partial^2 G(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z};\ \sigma')}{\partial \mathfrak{r}\,\partial n'}$$

erhält man leicht den Ausdruck

$$(22)\quad \mathfrak{r}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}\,\partial n'} = \frac{4\,\mathfrak{z}}{\mathfrak{r}^3} + Q_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z};\ \sigma') = 4\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) + Q_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z};\ \sigma').$$

Die Funktion Q_1 wird für $\mathfrak{r} \to 0$ wie $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ unendlich[6]).

Betrachten wir jetzt den Ausdruck

$$(23)\quad P(\tau) = \int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) \boldsymbol{p}'\, d\sigma'.$$

Nach bekannten Sätzen ist

$$(24)\quad P(\sigma^*) = 2\pi\,\boldsymbol{p}(\sigma^*) + \int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^*}\right) \boldsymbol{p}'\, d\sigma'.$$

Aus (22) und (24) folgt leicht, wenn man das Verhalten der Funktion Q_1 beachtet,

$$(25)\quad \lim_{\tau \to \sigma^*} -\int_S \boldsymbol{p}'\,\mathfrak{r}\frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}\,\partial n'}\, d\sigma' = -8\pi\,\boldsymbol{p}(\sigma^*) - \int_S \boldsymbol{p}'\,\mathfrak{r}^*\frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}^*\,\partial n'}\, d\sigma',$$

---

[5]) Vgl. P. Lévy, Sur l'allure des fonctions de Green et de Neumann dans le voisinage du contour, Acta mathematica **42** (1919), S. 207—267, insbes. S. 242—262 (S. 255—257).

[6]) Vgl. loc. cit. [3]) (S. 25). An der genannten Stelle wird irrtümlicherweise Q_1 als beschränkt bezeichnet.

mithin nach einer leichten Umrechnung (vgl. die Formel (15))

$$(26)\qquad \cdot\boldsymbol{p}(\sigma^*) - \frac{1}{4\pi}\int_S \mathfrak{r}^* \frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}^* \partial n'}\,\boldsymbol{p}'\,d\sigma' = \boldsymbol{\Phi}(\sigma^*),$$

wo zur Abkürzung $\boldsymbol{\Phi}(\sigma^*)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\sigma^*) = &-\frac{1}{2\pi}\int_T \Big\{\frac{\partial}{\partial x^*}G(\sigma^*,\tau')\Big(X' - u'\frac{\partial u'}{\partial x'} - v'\frac{\partial u'}{\partial y'} - w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\Big)\\ &+\frac{\partial}{\partial y^*}G(\sigma^*,\tau')\Big(Y' - u'\frac{\partial v'}{\partial x'} - v'\frac{\partial v'}{\partial y'} - w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\Big) + \cdots\Big\}d\tau'\\ &-\frac{1}{4\pi}\int_T \Big\{(x'-x^*)\frac{\partial}{\partial x^*}G(\sigma^*,\tau') + (y'-y^*)\frac{\partial}{\partial y^*}G(\sigma^*,\tau') + \cdots\Big\}\\ &\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi'\Big)d\tau' - 2\nu\Big(\frac{\partial U(\sigma^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial V(\sigma^*)}{\partial y^*} + \frac{\partial W(\sigma^*)}{\partial z^*}\Big)\end{aligned}\qquad (27)$$

bezeichnet.

Die Gleichung (27) geht, wenn man in $\boldsymbol{\Phi}(\sigma^*)$ die unbekannten Funktionen u, v, w und ihre Ableitungen gleich Null setzt, in die Gleichung (6) der Crudelischen Arbeit über.

Die Beziehung (26) bildet, wenn man $\boldsymbol{\Phi}(\sigma^*)$ als bekannt ansieht, eine der Fredholmschen Theorie zugängliche Integralgleichung. Der Kern $\mathfrak{r}^*\frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}^* \partial n'}$ wird für $\sigma^* \to \sigma'$ wie $\mathfrak{r}^{-1}$ unendlich.

Die zu (26) gehörige homogene Integralgleichung hat eine einzige Nullösung

$$\boldsymbol{p} = c \quad (c \text{ konstant}).$$

Man gelangt in der Tat zu der fraglichen Integralgleichung, wenn man von den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} + \nu\,\Delta u = 0,\\ &-\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} + \nu\,\Delta v = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\\ &-\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} + \nu\,\Delta w = 0,\end{aligned}\qquad (28)$$

und den Randbedingungen $\varphi = \psi = \chi = 0$ ausgeht, d. h. wenn man die „unendlich langsame“ kräftelose Bewegung einer mit Reibung behafteten Flüssigkeit bei ruhender Hülle und ruhenden eingetauchten Körpern studiert[7]). Eine Lösung des Systems ist durch $u^2 + v^2 + w^2 = 0$, $\boldsymbol{p} = c$ (c konstant) gegeben, — weitere Lösungen gibt es nicht. Aus (28) folgt nämlich durch teilweise Integration

[7]) Vgl. U. Crudeli, loc. cit. [2]) (S. 250).

$$\int_T \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau = -\int_T u\,\Delta u\,d\tau = \frac{1}{\nu}\int_T u\frac{\partial p}{\partial x}\,d\tau .$$

Aus dieser und den beiden hierzu analogen Formeln erhält man

$$\int_T \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau = \frac{1}{\nu}\int_T \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right) d\tau$$

$$= -\frac{1}{\nu}\int_T p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau = 0,$$

mithin

$$u = v = w = 0, \qquad \text{demnach } p \text{ konstant.}$$

Es sei $\Lambda(\sigma)$ die einzige, irgendwie normierte Nullösung der zu (26) adjungierten Integralgleichung

$$\Lambda(\sigma') - \frac{1}{4\pi}\int_S \Lambda(\sigma^*)\frac{\partial^2 G(\sigma^*, \sigma')}{\partial \mathfrak{r}^* \partial n'}\mathfrak{r}^* d\sigma^* = 0. \tag{29}$$

Die Gleichung (26) ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$\int_S \Lambda(\sigma)\Phi(\sigma)\,d\sigma = 0 \tag{30}$$

ist. Nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie erfüllt der Integralausdruck in (29), mithin auch $\Lambda(\sigma)$ eine H-Bedingung[8]).

Ist die Bedingung (30) erfüllt, so hat (26) eine bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmte Lösung.

§ 2.

Vorbereitende Betrachtungen. Unendlich langsame permanente Bewegung.

Wir werden weiter unten den Existenzbeweis der Lösung der Gleichungen (1) durch sukzessive Approximationen erbringen. Als Vorbereitung hierzu betrachten wir das System der Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\,\Delta u + F_1 &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu\,\Delta v + F_2 &= 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu\,\Delta w + F_3 &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

[8]) Man wird, um dies einzusehen, von der Formel (20) ausgehend, die ersten Glieder der Entwicklung von $\mathfrak{r}^* \frac{\partial^2 G(\sigma^*, \sigma')}{\partial \mathfrak{r}^* \partial n'}$ bestimmen und die bekannten Sätze und Methoden in der Theorie des Potentials einer einfachen und Doppelbelegung anwenden. (Vgl. beispielsweise meinen Encyklopädieartikel II C 3, S. 199–206.) Man vergleiche die Bemerkungen im Anhang, S. 415.

unter F_1, F_2, F_3 in $T+S$ erklärte, stetige Funktionen verstanden, die daselbst stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung haben. Im Innern von T möge darüber hinaus der Ausdruck $\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$ auch noch stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung haben. Wie in § 1 handelt es sich um die Bestimmung derjenigen Lösungen von (31), die auf S den Bedingungen

$$u=\varphi(\sigma), \quad v=\psi(\sigma), \quad w=\chi(\sigma)$$

genügen. Offenbar sind (31) die Differentialgleichungen einer *unendlich langsamen* permanenten Bewegung unserer Flüssigkeit. Durch Betrachtungen, die den in § 1 durchgeführten ganz analog verlaufen, gelangt man zu der Integralgleichung

$$\overline{p}(\sigma^*)-\frac{1}{4\pi}\int_S \mathfrak{r}^*\frac{\partial^2 G(\sigma^*,\sigma')}{\partial \mathfrak{r}^*\partial n'}\overline{p}'\,d\sigma'=\Psi(\sigma^*), \tag{32}$$

$$\Psi(\sigma^*)=-\frac{1}{2\pi}\int_T\left\{\frac{\partial}{\partial x^*}G(\sigma^*,\tau')F_1'+\frac{\partial}{\partial y^*}G(\sigma^*,\tau')F_2'+\frac{\partial}{\partial z^*}G(\sigma^*,\tau')F_3'\right\}d\tau$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_T\Big\{(x'-x^*)\frac{\partial}{\partial x^*}G(\sigma^*,\tau')+(y'-y^*)\frac{\partial}{\partial y^*}G(\sigma^*,\tau') \tag{32*}$$

$$+(z'-z^*)\frac{\partial}{\partial z^*}G(\sigma^*,\tau')\Big\}\left(\frac{\partial F_1'}{\partial x'}+\frac{\partial F_2'}{\partial y'}+\frac{\partial F_3'}{\partial z'}\right)d\tau'-2\nu\left(\frac{\partial U}{\partial x^*}+\frac{\partial V}{\partial y^*}+\frac{\partial W}{\partial z^*}\right)$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit dieser Gleichung ist

$$\int_S \Psi(\sigma^*)\Lambda(\sigma^*)\,d\sigma^*=0\,. \tag{33}$$

Ist (33), wie wir voraussetzen wollen, erfüllt, so hat (32) gewiß eine, bis auf eine für das weitere belanglose additive Konstante bestimmte, Lösung $\overline{p}(\sigma^*)$. Wir bestimmen jetzt in $T+S$ eine Ortsfunktion $\overline{p}(x,y,z)$ oder, anders geschrieben, $\overline{p}(\tau)$ aus der der Formel (15) entsprechenden Beziehung

$$12\pi\overline{p}+2\nu\int_S\left(\varphi'\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial x\,\partial n'}+\psi'\frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial n'}+\chi'\frac{\partial^2 G}{\partial z\,\partial n'}\right)d\sigma'$$

$$+\int_S\overline{p}'\left((x-x')\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial x\,\partial n'}+\ldots\right)d\sigma'+2\int_T\left\{\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x}F_1'+\frac{\partial G}{\partial y}F_2'+\frac{\partial G}{\partial z}F_3\right\}d \tag{34}$$

$$+\int_T\left\{(x'-x)\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x}+\ldots\right\}\left(\frac{\partial F_1'}{\partial x'}+\frac{\partial F_2'}{\partial y'}+\frac{\partial F_3'}{\partial z'}\right)d\tau'=0\,.$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\,d\sigma' = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\,d\sigma' = 0, \ldots; \\ &\frac{\partial}{\partial x}\int_S x' \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\,d\sigma' = 4\pi\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\int_S y' \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\,d\sigma' = 4\pi, \ldots \end{aligned}$$

ist. Ersetzt man darum $\bar{p}(\sigma^*)$ in (34) durch $\bar{p}(\sigma^*) + c$ (c konstant), so geht $\bar{p}(\tau)$ in $\bar{p}(\tau) + c$ über. Nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie hat $\Psi(\sigma^*)$ stetige, die H-Bedingung erfüllende partielle Ableitungen erster Ordnung[9]), $\bar{p}(\sigma^*)$ hat die gleiche Eigenschaft[10]). Aus (34) folgt, daß $\bar{p}$ in $T + S$ stetig ist und stetige, einer H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung hat. In jedem ganz in T enthaltenen Bereiche hat ferner $\bar{p}$ stetige, die H-Bedingung befriedigende Ableitungen zweiter Ordnung. Man sieht dies so ein. Der erste Integralausdruck in (34) hat, wie schon vorhin bemerkt worden ist, den Wert $4\pi\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)$, stellt darum eine in $T + S$ stetige, in T reguläre Potentialfunktion dar; ihre partielle Ableitungen erster Ordnung sind auch noch auf S stetig und genügen in $T + S$ einer H-Bedingung. Auch der zweite Integralausdruck, den man in der Form

$$(36)\qquad -\int_S \bar{p}'\,\mathfrak{r}\,\frac{\partial^2 G(\tau,\sigma')}{\partial \mathfrak{r}\,\partial n'}\,d\sigma'$$

schreiben kann, ist, wie man sich ohne Mühe überzeugt, eine in $T + S$ stetige, in T reguläre Potentialfunktion. Ihr Randwert[11])

$$-\int_S \bar{p}'\,\mathfrak{r}^*\,\frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}^*\,\partial n'}\,d\sigma' - 8\pi\,\bar{p}(\sigma^*) = 4\pi\,\Psi(\sigma^*) - 12\pi\,\bar{p}(\sigma^*)$$

hat stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung. Also hat (36) in $T + S$ stetige, die H-Bedingung erfüllende Ableitungen erster Ordnung. Was schließlich die beiden letzten Summanden in (34) betrifft, so folgt aus den bekannten Sätzen der Potentialtheorie, daß sie in $T + S$ gewiß stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung, im Innern von T auch noch stetige Ableitungen zweiter Ordnung haben[12]).

Es gilt nun weiter, wenn man zur Abkürzung vorübergehend

$$(36^*)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = K(x,y,z)$$

[9]) Es handelt sich hier um elementare Sätze über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des Newtonschen Potentials einer Volumladung (vgl. loc. cit. [8]) S. 209, Satz 4).

[10]) Vgl. den Anhang, S. 414–415.

[11]) Vgl. die Formel (25).

[12]) Vgl. die Fußnote [9]).

setzt,

$$2\Delta\int_T\left\{\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x}F_1'+\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial y}F_2'+\ldots\right\}d\tau'=2\frac{\partial}{\partial x}\Delta\int_T G(\tau,\tau')F_1'\,d\tau'$$

$$+2\frac{\partial}{\partial y}\Delta\int_T G(\tau,\tau')F_2'\,d\tau'+\ldots=-8\pi K, \tag{37}$$

$$\Delta\int_T\left(x'\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial x}+y'\frac{\partial G(\tau,\tau')}{\partial y}+\ldots\right)K'\,d\tau'=\frac{\partial}{\partial x}\Delta\int_T G(\tau,\tau')x'K'\,d\tau'$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Delta\int_T G(\tau,\tau')y'K'\,d\tau'+\ldots=-4\pi\left\{\frac{\partial}{\partial x}(xK)+\frac{\partial}{\partial y}(yK)+\frac{\partial}{\partial z}(zK)\right\} \tag{38}$$

$$=-12\pi K-4\pi\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)K,$$

$$-\Delta\left\{x\frac{\partial}{\partial x}\int_T G(\tau,\tau')K'\,d\tau'+y\frac{\partial}{\partial y}\int_T G(\tau,\tau')K'\,d\tau'+\ldots\right\}$$

$$=-2\Delta\int_T G(\tau,\tau')K'\,d\tau'-\left(x\frac{\partial}{\partial x}\Delta+y\frac{\partial}{\partial y}\Delta+z\frac{\partial}{\partial z}\Delta\right)\int_T G(\tau,\tau')K'\,d\tau' \tag{39}$$

$$=8\pi K+4\pi\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)K.$$

Aus (34), (37), (38), (39) folgt nunmehr leicht

$$\Delta\bar{p}=K=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{40}$$

Da nach Voraussetzung K in T stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung hat, so besitzt $\bar{p}$ in T auch noch stetige, die H-Bedingung befriedigende Ableitungen dritter Ordnung.

Wir bestimmen jetzt die Funktionen u, v, w aus den zu (9), (10) und (11) analogen Gleichungen

$$u=\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\varphi'\,d\sigma'+\frac{1}{8\pi\nu}\int_S\frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\bar{p}'(x-x')\,d\sigma'$$

$$-\frac{1}{8\pi\nu}\int_T G(\tau,\tau')\left\{2F_1'+(x'-x)\left(\frac{\partial F_1'}{\partial x'}+\frac{\partial F_2'}{\partial y'}+\frac{\partial F_3'}{\partial z'}\right)\right\}d\tau', \tag{41}$$

. . . . . .

Man überzeugt sich zunächst fast unmittelbar, daß u, v, w in $T+S$ stetig sind und daselbst stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung haben. In jedem ganz im Innern von T enthaltenen Bereiche haben u, v, w stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen. Aus (41) und den hierzu analogen Gleichungen folgt, wie sich ohne Mühe verifizieren läßt, daß u, v, w auf S entsprechend die Werte φ, ψ, χ an-

nehmen und den Gleichungen

$$(42)\qquad \begin{aligned} -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + F_1 + \nu \Delta u &= 0\,, \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + F_2 + \nu \Delta v &= 0\,, \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + F_3 + \nu \Delta w &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Berücksichtigt man nämlich die aus (40) folgenden Beziehungen

$$x\,\bar{p}(\tau) = -\frac{x}{4\pi}\int_T G(\tau,\tau')\,K'\,d\tau' + \frac{x}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,\bar{p}(\sigma')\,d\sigma'\,,$$

$$\Delta(x\,\bar{p}) = x\,K + 2\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\,,$$

$$x\,\bar{p}(\tau) = -\frac{1}{4\pi}\int_T G(\tau,\tau')\left(x'K' + 2\,\frac{\partial \bar{p}'}{\partial x'}\right)d\tau' + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,x'\,\bar{p}(\sigma'\ d\sigma',$$

mithin

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_T G(\tau,\tau')\left((x'-x)\,K' + 2\,\frac{\partial \bar{p}'}{\partial x'}\right)d\tau' + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,(x'-x)\,\bar{p}(\sigma')\,d\sigma',$$

so findet man

$$u - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\,G(\tau,\sigma')\,\varphi'\,d\sigma' + \frac{1}{4\pi\nu}\int_T G(\tau,\tau')\left(F_1' - \frac{\partial p'}{\partial x'}\right)d\tau'\,.$$

Hieraus ergibt sich aber die erste der Gleichungen (42).

Nach bekannten Sätzen folgt aus (42), daß u, v, w in $T+S$ stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung und in T ebenso beschaffene Ableitungen dritter Ordnung haben[13]).

Aus (42) und (40) ergibt sich durch Differentiation und Zusammenfassung

$$(43)\qquad \Delta\,\mathsf{M} = \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0\,.$$

Gelingt es uns, zu zeigen, daß M in $T+S$ verschwindet, so ist damit gezeigt, daß u, v, w, p die gesuchten Lösungen von (31) sind.

Aus den Gleichungen (42) und der Beziehung

$$(44)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \mathsf{M}$$

folgt durch sinngemäße Wiederholung der auf S. 389—393 durchgeführten Betrachtungen die Beziehung

$$(45)\qquad \bar{p}(\sigma^*) - \frac{1}{4\pi}\int_S \mathfrak{r}^*\,\frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}^*\,\partial n'}\,\bar{p}'\,d\sigma' = \Psi(\sigma^*) + 2\,\nu\,\mathsf{M}(\sigma^*)\,.$$

[13]) Vgl. loc. cit. [9]).

Aus (45) und (32) folgt $\mathsf{M}(\sigma^*) = 0$, mithin wegen $\Delta \mathsf{M} = 0$, wie behauptet, $\mathsf{M}(x, y, z) = 0$.

Nun die Beziehung (30). Sie ist, wie wir sogleich zeigen werden, gewiß erfüllt, wenn die Randfunktionen φ, ψ, χ, wie eingangs vorausgesetzt, der Bedingung (3) gemäß gewählt sind. In dem besonderen Falle einer eine Hohlkugel erfüllenden Flüssigkeitsmasse hat dies schon früher Herr Crudeli durch direkte Rechnung gefunden[14]).

Wir setzen mit Herrn Crudeli

$$F_1^* = F_1 + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} K' d\tau', \qquad F_2^* = F_2 + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} K' d\tau',$$

(46)

$$F_3^* = F_3 + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} K' d\tau'.$$

Wegen (36*) ist

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial x} + \frac{\partial F_2^*}{\partial y} + \frac{\partial F_3^*}{\partial z} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} - K = 0. \tag{47}$$

Wir setzen weiter

$$\bar{p} = p^* - \frac{1}{4\pi}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} K' d\tau' + \Theta, \tag{48}$$

$$u = u^* + \frac{1}{4\pi\nu}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} F_1^{*\prime} d\tau' - \frac{1}{4\pi\nu}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} \Theta' d\tau' = u^* + \mathfrak{u},$$

$$v = v^* + \frac{1}{4\pi\nu}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} F_2^{*\prime} d\tau' - \frac{1}{4\pi\nu}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} \Theta' d\tau' = v^* + \mathfrak{v}, \tag{49}$$

$$w = w^* + \frac{1}{4\pi\nu}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} F_3^{*\prime} d\tau' - \frac{1}{4\pi\nu}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}} \Theta' d\tau' = w^* + \mathfrak{w},$$

$$\Theta(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{\mathfrak{r}}(F_1^{*\prime}\cos(n', x') + F_2^{*\prime}\cos(n', y') + F_3^{*\prime}\cos(n', z'))\, d\sigma' \tag{50}$$

und finden nach Einsetzen in (31) wegen

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}\Theta' d\tau' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}\Theta' d\tau' = \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \ldots$$

nach einer leichten Umrechnung

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu\Delta u^* = 0, \quad -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu\Delta v^* = 0, \quad -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \nu\Delta w^* = 0. \tag{51}$$

---

[14]) Vgl. U. Crudeli, loc. cit. [2]).

Beachtet man, daß

$$4\pi\nu\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}F_1^{*\prime}\,d\tau'-\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}\Theta'\,d\tau'\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}F_2^{*\prime}\,d\tau'-\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}\Theta'\,d\tau'\Big)+\ldots=\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}F_1^{*\prime}\,d\tau'$$

(52)
$$+\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}F_2^{*\prime}\,d\tau'+\ldots-4\pi\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}\Theta'\,d\tau'=\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}F_1^{*\prime}\,d\tau'$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}F_2^{*\prime}\,d\tau'+\ldots-\int_S \frac{1}{\mathfrak{r}}(F_1^{*\prime}\cos(n',x')+F_2^{*\prime}\cos(n',y')+\ldots)\,d\sigma'$$

$$=\int_T \frac{1}{\mathfrak{r}}\left(\frac{\partial F_1^{*\prime}}{\partial x'}+\frac{\partial F_2^{*\prime}}{\partial y'}+\frac{\partial F_3^{*\prime}}{\partial z'}\right)d\tau'=0$$

ist, so findet man weiter

(53)
$$\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{\partial v^*}{\partial y}+\frac{\partial w^*}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Aus (3) und (52) folgt, wenn φ^*, ψ^*, χ^* die Randwerte von u^*, v^*, w^* bezeichnen,

(54)
$$\int_S(\varphi^*\cos(n,x)+\psi^*\cos(n,y)+\chi^*\cos(n,z))\,d\sigma$$
$$=\int_S(\varphi\cos(n,x)+\psi\cos(n,y)+\chi\cos(n,z))\,d\sigma+\int_T\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right)d\tau=0.$$

Wie man sich ohne Mühe überzeugt, haben φ^*, ψ^*, χ^* stetige Ableitungen erster, stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung[15]).

Die Differentialgleichungen (51) und (53) sind den Gleichungen (31) vollkommen äquivalent. Sie führen zu der Integralgleichung

(55)
$$p^*(\sigma^*)-\frac{1}{4\pi}\int_S \mathfrak{r}^*\frac{\partial^2 G(\sigma^*,\sigma')}{\partial \mathfrak{r}^*\,\partial n'}p^{*\prime}\,d\sigma'=\Psi^*(\sigma^*),$$

$$\Psi^*(\sigma^*)=-2\nu\left(\frac{\partial U^*}{\partial x^*}+\frac{\partial V^*}{\partial y^*}+\frac{\partial W^*}{\partial z^*}\right),$$

unter U^*, V^*, W^* diejenigen in T regulären Potentialfunktionen verstanden, die auf S entsprechend die Werte φ^*, ψ^*, χ^* annehmen. *Die für die Lösbarkeit des Systems* (51), (53), *also auch des Systems* (31) *notwendige*

[15]) Vgl. loc. cit. [8]) und [9]).

und hinreichende Bedingung lautet

$$\int_S \Psi^*(\sigma^*)\, A(\sigma^*)\, d\sigma^* = 0. \tag{56}$$

Sie ist, wie wir sogleich zeigen werden, *erfüllt, sobald* (54), *mithin* (3) *erfüllt ist.* Damit wird aber unsere Behauptung bewiesen sein.

Wir bringen vor allem die Beziehung (56) auf eine andere Form, indem wir die Normalableitungen $\mathfrak{f}(\sigma)$, $\mathfrak{g}(\sigma)$, $\mathfrak{h}(\sigma)$ der Potentialfunktionen $U^*(\tau)$, $V^*(\tau)$, $W^*(\tau)$ einführen. Offenbar sind $\mathfrak{f}(\sigma)$, $\mathfrak{g}(\sigma)$, $\mathfrak{h}(\sigma)$ Ortsfunktionen auf S, die stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung haben. Nach bekannten Sätzen läßt sich beispielsweise $U^*(\tau)$ in der Form

$$U^*(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{1}{\mathfrak{r}}\, \mathfrak{m}(\sigma')\, d\sigma' + U_0 \qquad (U_0 \text{ konstant}) \tag{57}$$

darstellen. Die Dichte der Belegung $\mathfrak{m}(\sigma)$ ist dabei eine bestimmte Lösung der linearen Integralgleichung

$$\mathfrak{m}(\sigma) - \frac{1}{2\pi}\int_S \mathfrak{m}(\sigma')\, \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) d\sigma' = -\mathfrak{f}(\sigma). \tag{58}$$

Die Funktion $\mathfrak{m}(\sigma)$, die sich in der Form

$$\mathfrak{m}(\sigma) = \int_S \mathfrak{H}(\sigma, \sigma')\, \mathfrak{f}(\sigma')\, d\sigma' \tag{59}$$

darstellen läßt, ist stetig und erfüllt gewiß eine H-Bedingung[16]).

Es gilt nun

$$\frac{\partial U^*(\sigma)}{\partial x} = \frac{\partial U^*(\sigma)}{\partial n}\cos(n, x) + \frac{\partial U^*(\sigma)}{\partial l}\sin(n, x), \tag{60}$$

wo das Symbol $\frac{\partial}{\partial l}$ die Ableitung in der Richtung der Projektion der positiven x-Achse auf die Tangentialebene in σ bezeichnet.

Weiter ist

$$\frac{\partial U^*(\sigma)}{\partial n} = \mathfrak{f}(\sigma), \qquad \frac{\partial U^*(\sigma)}{\partial l} = \frac{1}{2\pi}\int_S{}' \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) \mathfrak{m}(\sigma')\, d\sigma', \tag{61}$$

wo das Komma über dem Integralzeichen andeuten soll, daß es sich um den Cauchyschen Hauptwert handelt. Aus (60) und (61) folgt

$$\frac{\partial U^*(\sigma)}{\partial x} = \mathfrak{f}(\sigma)\cos(n, x) + \frac{1}{2\pi}\sin(n, x)\int_S{}' \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) \mathfrak{m}(\sigma')\, d\sigma',$$

[16]) Die Funktion $\mathfrak{H}(\sigma, \sigma')$ hängt in bekannter Weise mit dem zur Integralgleichung (58) gehörigen Fredholmschen Quotienten zusammen. Vgl. beispielsweise loc. cit. [8]) S. 239–242.

mithin

$$\int_S A(\sigma)\frac{\partial U^*(\sigma)}{\partial x}\,d\sigma = \int_S A(\sigma)\mathfrak{f}(\sigma)\cos(n,x)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_S A(\sigma)\sin(n,x)\,d\sigma \int_S{}' \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\tau}\right)\mathfrak{m}(\sigma')\,d\sigma'. \tag{62}$$

Da die Funktion $A(\sigma)\sin(n,x)$ einer H-Bedingung genügt (vgl. S. 395), so kann man, wie sich leicht zeigen läßt, in (62) rechts die Reihenfolge der Integrationen umkehren. Man findet so

$$\int_S A(\sigma)\frac{\partial U^*(\sigma)}{\partial x}\,d\sigma = \int_S A(\sigma)\mathfrak{f}(\sigma)\cos(n,x)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_S \mathfrak{m}(\sigma')\,d\sigma' \int_S{}' A(\sigma)\sin(n,x)\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\sigma. \tag{63}$$

Aus (63) und (59) folgt, daß sich der Integralausdruck (63) in der Form

$$\int_S A(\sigma)\frac{\partial U^*(\sigma)}{\partial x}\,d\sigma = \int_S \mathfrak{f}(\sigma)\mathfrak{L}(\sigma)\,d\sigma \tag{64}$$

darstellen läßt. Aus (64) und den beiden hierzu analogen Formeln folgt daß die notwendige und hinreichende Bedingung (56) auf die Gestalt

$$\int_S (\mathfrak{L}(\sigma)\mathfrak{f}(\sigma) + \mathfrak{M}(\sigma)\mathfrak{g}(\sigma) + \mathfrak{N}(\sigma)\mathfrak{h}(\sigma))\,d\sigma = 0 \tag{65}$$

gebracht werden kann.

Es gilt nun weiter

$$\varphi^*(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{1}{\tau}\mathfrak{m}'\,d\sigma' + U_0,$$

darum wegen (59), da doch $\int_S \cos(n,x)\,d\sigma = 0$ ist,

$$\int_S \varphi^*(\sigma)\cos(n,x)\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_S \mathfrak{m}(\sigma')\,d\sigma' \int_S \frac{1}{\tau}\cos(n,x)\,d\sigma = \int_S \overline{\mathfrak{L}}(\sigma)\mathfrak{f}(\sigma)\,d\sigma. \tag{66}$$

Aus (66) und den beiden hierzu analogen Formeln folgt

$$\int_S (\varphi^*(\sigma)\cos(n,x) + \psi^*(\sigma)\cos(n,y) + \chi^*(\sigma)\cos(n,z))\,d\sigma = \int_S (\overline{\mathfrak{L}}(\sigma)\mathfrak{f}(\sigma) + \overline{\mathfrak{M}}(\sigma)\mathfrak{g}(\sigma) + \overline{\mathfrak{N}}(\sigma)\mathfrak{h}(\sigma))\,d\sigma. \tag{67}$$

Ist (65) erfüllt, so ist, wie auch $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ beschaffen seien[17]), das Problem

[17]) Sie müssen freilich stetig sein, stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung haben und die Bedingungen

$$\int_S \mathfrak{f}\,d\sigma = \int_S \mathfrak{g}\,d\sigma = \int_S \mathfrak{h}\,d\sigma = 0 \tag{68}$$

erfüllen.

(51), (53) lösbar. Die Funktionen u^*, v^*, w^* genügen der Kontinuitätsgleichung (53). Es gilt darum

$$\int_S (\varphi^*(\sigma)\cos(n,x) + \psi^*(\sigma)\cos(n,y) + \chi^*(\sigma)\cos(n,z))\,d\sigma = 0\,.$$

Wegen (67) ist

$$(69) \qquad \int_S (\overline{\mathfrak{L}}(\sigma)\mathfrak{f}(\sigma) + \overline{\mathfrak{M}}(\sigma)\mathfrak{g}(\sigma) + \overline{\mathfrak{N}}(\sigma)\mathfrak{h}(\sigma))\,d\sigma = 0\,.$$

Aus (65) folgt also stets (69), wie auch $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ beschaffen seien[17]). Hieraus folgt aber leicht, daß

$$(70) \quad \mathfrak{L}(\sigma) = \alpha_0\overline{\mathfrak{L}}(\sigma) + \alpha_1, \quad \mathfrak{M}(\sigma) = \alpha_0\overline{\mathfrak{M}}(\sigma) + \alpha_2, \quad \mathfrak{N}(\sigma) = \alpha_0\overline{\mathfrak{N}}(\sigma) + \alpha_3$$
$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ konstant})$$

gesetzt werden kann.

Ist jetzt bei vorgegebenen $\varphi^*, \psi^*, \chi^*$ (54) erfüllt, so gilt wegen (67) auch (69). Wegen (70) und (68) ist (65), mithin, wie behauptet, auch (56) erfüllt. *Das Problem* (51), *mithin auch das Ausgangsproblem* (31) *sind lösbar.*

Nach bekannten Sätzen ist die Lösung der Integralgleichung (32) durch die Formel

$$(71) \qquad \bar{p}(\sigma^*) = \Psi(\sigma^*) + \int_S K(\sigma^*, \sigma')\,\Psi(\sigma')\,d\sigma' + p^0,$$

wo p^0 eine willkürliche Konstante, $K(\sigma^*, \sigma')$ eine wohl bestimmte Funktion von σ^* und σ' bedeutet, gegeben.

Es möge jetzt $\Psi(\sigma)$ Ungleichheiten von der Form

$$(71') \quad |\Psi|, \left|\frac{\partial\Psi}{\partial l}\right| \leqq \mathfrak{c}, \left|\frac{\partial\Psi(\sigma_1)}{\partial l} - \frac{\partial\Psi(\sigma_2)}{\partial l}\right| \leqq \mathfrak{c}\,d_{12}^{\lambda} \quad (0 < \lambda < 1,\ \mathfrak{c} \text{ konstant})$$

genügen. In (71′) bezeichnet das Symbol $\frac{\partial}{\partial l}$ die Ableitung in bezug auf irgendeinen der beiden Gaußschen Parameter der Fläche; d_{12} ist der Abstand der Punkte σ_1 und σ_2. Aus (71) ergibt sich sogleich

$$(71'') \qquad |\bar{p}(\sigma) - p^0| \leqq \alpha_1\,\mathfrak{c}\,,$$

unter α_1 eine positive Konstante verstanden, wie später unter $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Nunmehr folgt aus (32), wenn man (20) beachtet und die bekannten Hilfssätze der Potentialtheorie von O. Hölder, Liapounoff und A. Korn heranzieht,

$$(71''') \qquad \left|\frac{\partial\bar{p}}{\partial l}\right| \leqq \alpha_2\,\mathfrak{c}\,, \qquad \left|\frac{\partial\bar{p}(\sigma_1)}{\partial l} - \frac{\partial\bar{p}(\sigma_2)}{\partial l}\right| \leqq \alpha_3\,\mathfrak{c}\,d_{12}^{\lambda}\ ^{18}).$$

[18]) Man vergleiche die Ausführungen im Anhang.

§ 3.

Sukzessive Approximationen.

Wir wenden uns jetzt unserem eigentlichen Problem zu und versuchen das System der Gleichungen (1) und (2) oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Integro-Differentialgleichungen (26), (27), (9), (10) und (11) durch sukzessive Approximationen aufzulösen. Wir setzen in einer ersten Näherung

$$\Phi_1(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \Big\{\frac{\partial}{\partial x}G(\sigma,\tau')X' + \frac{\partial}{\partial y}G(\sigma,\tau')Y' + \dots\Big\}d\tau'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_T \Big\{(x'-x)\frac{\partial}{\partial x}G(\sigma,\tau') + (y'-y)\frac{\partial}{\partial y}G(\sigma,\tau') + \dots\Big\}$$

$$\times\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'}\Big)d\tau' - 2\nu\Big(\frac{\partial U(\sigma)}{\partial x} + \frac{\partial V(\sigma)}{\partial y} + \frac{\partial W(\sigma)}{\partial z}\Big), \tag{72}$$

$$p_1(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + \int_S K(\sigma,\sigma')\,\Phi_1(\sigma')\,d\sigma' + p^0, \tag{73}$$

$$u_1(\tau) = U(\tau) + \frac{1}{8\pi\nu}\int_S \frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,p_1'(x-x')\,d\sigma'$$

$$+\frac{1}{8\pi\nu}\int_T G(\tau,\tau')\Big\{2X' + (x'-x)\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'}\Big)\Big\}d\tau', \tag{74}$$

. . . . . .

Wie man sich leicht überzeugt, sind $u_1(\tau)$, $v_1(\tau)$, $w_1(\tau)$ von p^0 unabhängig; $u_1(\tau)$, $v_1(\tau)$, $w_1(\tau)$, $p_1(\tau)$ sind diejenigen Lösungen der Gleichungen (31) mit $F_1 = X$, $F_2 = Y$, $F_3 = Z$, die den Randbedingungen $u_1 = \varphi$, $v_1 = \psi$, $w_1 = \chi$ genügen.

Wir setzen jetzt in einer zweiten Näherung

$$\Phi_2(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \Big\{\frac{\partial}{\partial x}G(\sigma,\tau')\Big(X' - u_1'\frac{\partial u_1'}{\partial x'} - v_1'\frac{\partial u_1'}{\partial y'} - w_1'\frac{\partial u_1'}{\partial z'}\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}G(\sigma,\tau')\Big(Y' - u_1'\frac{\partial v_1'}{\partial x'} - v_1'\frac{\partial v_1'}{\partial y'} - w_1'\frac{\partial v_1'}{\partial z'}\Big) + \dots\Big\}d\tau'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_T \Big\{(x'-x)\frac{\partial}{\partial x}G(\sigma,\tau') + (y'-y)\frac{\partial}{\partial y}G(\sigma,\tau') + \dots\Big\} \tag{75}$$

$$\times\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi_1'\Big)d\tau' - 2\nu\Big(\frac{\partial U(\sigma)}{\partial x} + \frac{\partial V(\sigma)}{\partial y} + \frac{\partial W(\sigma)}{\partial z}\Big),$$

[19]) Die Funktion $K(\sigma,\sigma')$ hängt in bekannter Weise mit dem zur Integralgleichung (73) gehörigen Fredholmschen Quotienten zusammen.

$$(76)\quad \Pi_1(\tau) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial y}\right),$$

$$(77)\quad \boldsymbol{p}_2(\sigma) = \boldsymbol{\Phi}_2(\sigma) + \int_S K(\sigma,\sigma')\,\boldsymbol{\Phi}_2(\sigma')\,d\sigma' + p^0,$$

$$u_2(\tau) = U(\tau) + \frac{1}{8\pi\nu}\int_S \frac{\partial}{\partial n'} G(\tau,\sigma')\,\boldsymbol{p}_2'(x-x')\,d\sigma'$$

$$(78)\quad + \frac{1}{8\pi\nu}\int_T G(\tau,\tau')\Big\{2X' + (x'-x)\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z} - \Pi_1'\Big) - 2\Big(u_1'\frac{\partial u_1'}{\partial x'} + v_1'\frac{\partial u_1'}{\partial y'} + w_1'\frac{\partial u_1'}{\partial z'}\Big)\Big\}\,d\tau',$$

. . . . . .

Wie man leicht sieht, sind $u_2(\tau)$, $v_2(\tau)$, $w_2(\tau)$ von p^0 unabhängig; $u_2(\tau)$, $v_2(\tau)$, $w_2(\tau)$, $p_2(\tau)$ sind diejenigen Lösungen der Gleichungen (31) mit

$$(79)\quad F_1 = X - u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} - w_1\frac{\partial u_1}{\partial z},\quad F_2 = Y - u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} - w_1\frac{\partial v_1}{\partial z},$$
$$F_3 = Z - u_1\frac{\partial w_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial w_1}{\partial y} - w_1\frac{\partial w_1}{\partial z},$$

die auf S die Werte φ, ψ, χ annehmen.

Das Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden. In der n-ten Näherung setzen wir

$$\boldsymbol{\Phi}_n(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \Big\{\frac{\partial}{\partial x}G(\sigma,\tau')\Big(X' - u_{n-1}'\frac{\partial u_{n-1}'}{\partial x'} - v_{n-1}'\frac{\partial u_{n-1}'}{\partial y'} - w_{n-1}'\frac{\partial u_{n-1}'}{\partial z'}\Big) + \ldots\Big\}$$

$$(80)\quad - \frac{1}{4\pi}\int_T \Big\{(x'-x)\frac{\partial}{\partial x}G(\sigma,\tau') + \ldots\Big\}\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi_{n-1}'\Big)\,d\tau' - 2\nu\Big(\frac{\partial U(\sigma)}{\partial x} + \frac{\partial V(\sigma)}{\partial y} + \frac{\partial W(\sigma)}{\partial z}\Big),$$

$$\Pi_{n-1}(\tau) = \Big(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\Big)^2 + \ldots + 2\Big(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + \ldots\Big),$$

$$(81)\quad \boldsymbol{p}_n(\sigma) = \boldsymbol{\Phi}_n(\sigma) + \int_S K(\sigma,\sigma')\,\boldsymbol{\Phi}_n(\sigma')\,d\sigma' + p^0,$$

$$u_n(\tau) = U(\tau) + \frac{1}{8\pi\nu}\int_S \frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\sigma')\,\boldsymbol{p}_n'(x-x')\,d\sigma'$$

$$(82)\quad + \frac{1}{8\pi\nu}\int_T G(\tau,\tau')\Big\{2X' + (x'-x)\Big(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi_{n-1}'\Big) - 2\Big(u_{n-1}'\frac{\partial u_{n-1}'}{\partial x} + v_{n-1}'\frac{\partial u_{n-1}'}{\partial y} + w_{n-1}'\frac{\partial u_{n-1}'}{\partial z}\Big)\Big\}\,d\tau',$$

. . . . . .

In der $(n+1)$-ten Approximation erhalten wir

$$\Phi_{n+1}(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \left\{\frac{\partial}{\partial x}G(\sigma,\tau')\left(X' - u_n'\frac{\partial u_n'}{\partial x'} - v_n'\frac{\partial u_n'}{\partial y'} - w_n'\frac{\partial u_n'}{\partial z'}\right) + \ldots\right\} d\tau'$$

(83)
$$-\frac{1}{4\pi}\int_T \left\{(x'-x)\frac{\partial}{\partial x}G(\sigma,\tau') + \ldots\right\}\left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi_n'\right) d\tau'$$
$$- 2\nu\left(\frac{\partial U(\sigma)}{\partial x} + \frac{\partial V(\sigma)}{\partial y} + \frac{\partial W(\sigma)}{\partial z}\right),$$

$$\Pi_n(\tau) = \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial v_n}{\partial x} + \ldots\right),$$

(84)
$$p_{n+1}(\sigma) = \Phi_{n+1}(\sigma) + \int_S K(\sigma,\sigma')\,\Phi_{n+1}(\sigma')\,d\sigma' + p^0,$$

$$u_{n+1}(\tau) = U(\tau) + \frac{1}{8\pi\nu}\int_S \frac{\partial}{\partial n'}G(\tau,\tau')\,p_{n+1}'(x-x')\,d\sigma'$$

(85)
$$+\frac{1}{8\pi\nu}\int_T G(\tau,\tau')\left\{2X' + (x'-x)\left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} - \Pi_n'\right)\right.$$
$$\left. - 2\left(u_n'\frac{\partial u_n'}{\partial x'} + v_n'\frac{\partial u_n'}{\partial y'} + w_n'\frac{\partial u_n'}{\partial z'}\right)\right\} d\tau',$$

. . . . . .

Die der n-ten und $(n+1)$-ten Näherung entsprechenden Werte der Funktionen F_1, F_2, F_3 sind

$$F_1^{(n)} = X - u_{n-1}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - v_{n-1}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - w_{n-1}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial z},$$

(86)
$$F_2^{(n)} = Y - u_{n-1}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} - v_{n-1}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} - w_{n-1}\frac{\partial v_{n-1}}{\partial z},$$

$$F_3^{(n)} = Z - u_{n-1}\frac{\partial w_{n-1}}{\partial x} - v_{n-1}\frac{\partial w_{n-1}}{\partial y} - w_{n-1}\frac{\partial w_{n-1}}{\partial z}$$ [20])

und

$$F_1^{(n+1)} = X - u_n\frac{\partial u_n}{\partial x} - v_n\frac{\partial u_n}{\partial y} - w_n\frac{\partial u_n}{\partial z},$$

(87)
$$F_2^{(n+1)} = Y - u_n\frac{\partial v_n}{\partial x} - v_n\frac{\partial v_n}{\partial y} - w_n\frac{\partial v_n}{\partial z},$$

$$F_3^{(n+1)} = Z - u_n\frac{\partial w_n}{\partial x} - v_n\frac{\partial w_n}{\partial y} - w_n\frac{\partial w_n}{\partial z}.$$

[20]) Übrigens haben allemal $u_{n-1}(\tau)$, $v_{n-1}(\tau)$, $w_{n-1}(\tau)$ in T stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen dritter Ordnung, so daß $\frac{\partial F_1^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial F_2^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial F_3^{(n)}}{\partial z}$ gewiß in T stetige, die H-Bedingung erfüllende Ableitungen erster Ordnung hat.

Es mögen nun die Geschwindigkeitskomponenten und ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in der $(n-1)$-ten und der n-ten Approximation den Ungleichheiten

$$
\begin{aligned}
&|u_{n-1}|,\ |v_{n-1}|,\ |w_{n-1}|;\ |u_n|,\ |v_n|,\ |w_n| \leqq \Omega,\\
&\left|\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial w_{n-1}}{\partial z}\right|;\ \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial w_n}{\partial z}\right| \leqq \Omega,\\
&\left|\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial z^2}\right|;\ \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2}\right| \leqq \Omega,\\
&\left|\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right|,\ \ldots,\ \left|\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2}\right)^{(2)}\right| \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{88}
$$

(Ω konstant, $0 < \lambda < 1$) [21])

und

$$
\begin{aligned}
&|u_n - u_{n-1}|,\ |v_n - v_{n-1}|,\ |w_n - w_{n-1}| \leqq h,\\
&\left|\frac{\partial}{\partial x}(u_n - u_{n-1})\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}(w_n - w_{n-1})\right| \leqq h,\\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_n - u_{n-1})\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(w_n - w_{n-1})\right| \leqq h,\\
&\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_n - u_{n-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_n - u_{n-1})\right)^{(2)}\right|,\ \ldots \leqq h\, d_{12}^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{89}
$$

(h konstant, $0 < \lambda < 1$)

genügen. Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
\Pi_n - \Pi_{n-1} &= \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right)^2 + \ldots + 2\left(\frac{\partial v_n}{\partial z}\,\frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial z}\,\frac{\partial w_{n-1}}{\partial y}\right)\\
&= \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right) + \ldots\\
&\quad + 2\left(\frac{\partial v_n}{\partial z} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial z}\right)\frac{\partial w_n}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial w_{n-1}}{\partial y}\right)\frac{\partial v_{n-1}}{\partial z},
\end{aligned}
$$

darum

$$
|\Pi_n - \Pi_{n-1}| \leqq 18\,\Omega h. \tag{90}
$$

In ähnlicher Weise finden wir die weiteren Ungleichheitsbeziehungen

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial x}(\Pi_n - \Pi_{n-1})\right|,\ \ldots \leqq 36\,\Omega h,\\
&\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\Pi_n - \Pi_{n-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\Pi_n - \Pi_{n-1})\right)^{(2)}\right|,\ \ldots \leqq \alpha^*\,\Omega h\, d_{12}^{\lambda}\quad (\alpha^* \text{ konst.}).
\end{aligned}
\tag{91}
$$

---

[21]) Wir schreiben zur Abkürzung $\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right)^{(1)}, \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right)^{(2)}, \ldots$ für $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x_1, y_1, z_1)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x_2, y_2, z_2)$, …, unter (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) zwei beliebige Punkte in $T + S$ verstanden; d_{12} ist ihr Abstand.

Des weiteren ist

$$F_1^{(n+1)} = \left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y} + w_n \frac{\partial u_n}{\partial z}\right) - \left(u_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + v_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + w_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z}\right)$$

$$= (u_n - u_{n-1}) \frac{\partial u_n}{\partial x} + u_{n-1} \frac{\partial}{\partial x}(u_n - u_{n-1}) + \ldots,$$

mithin

$$|F_1^{(n+1)} - F_1^{(n)}| \leqq 6\,\Omega h \tag{92}$$

und in analoger Weise

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(F_1^{(n+1)} - F_1^{(n)})\right|, \ldots \leqq 12\,\Omega h,$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(F_1^{(n+1)} - F_1^{(n)})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_1^{(n+1)} - F_1^{(n)})\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \alpha_* \Omega h d_{12}^{\lambda} \quad (\alpha_* \text{ konst.})^{22}$$

Ferner ist

$$\Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_T \left\{\frac{\partial}{\partial x} G(\sigma, \tau')(F_1^{(n)}(\tau') - F_1^{(n+1)}(\tau'))\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} G(\sigma, \tau')(F_2^{(n)}(\tau') - F_2^{(n+1)}(\tau')) + \ldots\right\} d\tau'$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_T \left\{(x' - x) \frac{\partial}{\partial x} G(\sigma, \tau') + (y' - y) \frac{\partial}{\partial y} G(\sigma, \tau') + \ldots\right\} (\Pi_n' - \Pi_{n-1}')\, d\tau',$$

darum nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie

$$|\Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma)| \leqq \alpha_4 \Omega h, \quad \left|\frac{\partial}{\partial l} \Phi_{n+1}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial l} \Phi_n(\sigma)\right| \leqq \alpha_5 \Omega h,$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial l} \Phi_{n+1}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial l} \Phi_n(\sigma)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial l} \Phi_{n+1}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial l} \Phi_n(\sigma)\right)^{(2)}\right| \leqq \alpha_6 \Omega h d_{12}^{\lambda}.^{23} \tag{94}$$

Betrachten wir jetzt die Differenz $p_{n+1}(\sigma) - p_n(\sigma)$. Aus (81) ergibt sich

$$p_{n+1}(\sigma) - p_n(\sigma) = \Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma) + \int_S K(\sigma, \sigma')\{\Phi_{n+1}(\sigma') - \Phi_n(\sigma')\}\, d\sigma.$$

Wir finden darum vor allem

$$|p_{n+1}(\sigma) - p_n(\sigma)| \leqq \alpha_7 \Omega h. \tag{95}$$

Weiter ist

$$p_{n+1}(\sigma) - \frac{1}{4\pi} \int_S p_{n+1}' \mathfrak{r} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}\, \partial n'}\, d\sigma' = \Phi_{n+1}(\sigma),$$

$$p_n(\sigma) - \frac{1}{4\pi} \int_S p_n' \mathfrak{r} \frac{\partial^2 G}{\partial \mathfrak{r}\, \partial n'}\, d\sigma' = \Phi_n(\sigma),$$

---

22) Ganz ähnliche Ungleichheiten gelten natürlich für $F_2^{(n)} - F_2^{(n+1)}$ und $F_3^{(n)} - F_3^{(n+1)}$.

23) Vgl. loc. cit. 9).

mithin

$$\boldsymbol{p}_{n+1}(\sigma)-\boldsymbol{p}_n(\sigma)-\frac{1}{4\pi}\int_S(\boldsymbol{p}'_{n+1}-\boldsymbol{p}'_n)\,\mathfrak{r}\,\frac{\partial^2 G}{\partial\tau\,\partial n'}\,d\sigma'=\boldsymbol{\Phi}_{n+1}(\sigma)-\boldsymbol{\Phi}_n(\sigma),$$

deshalb (man vergleiche die Schlußausführungen des § 2)

$$(96)\qquad \begin{gathered}\left|\frac{\partial}{\partial l}(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{p}_n)\right|\leqq\alpha_8\,\Omega\,h,\\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial l}(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{p}_n)\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial l}(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{p}_n)\right)^{(2)}\right|\leqq\alpha_9\,\Omega\,h\,d_{12}^{\lambda}.\end{gathered}$$

Es gelten nun nach einer früheren Bemerkung (vgl. S. 399) die Beziehungen

$$(97)\qquad \begin{gathered}-\frac{\partial p_n}{\partial x}+F_1^{(n)}+\nu\,\Delta u_n=0,\qquad -\frac{\partial p_n}{\partial y}+F_2^{(n)}+\nu\,\Delta v_n=0,\\ -\frac{\partial p_n}{\partial z}+F_3^{(n)}+\nu\,\Delta w_n=0,\qquad \frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial v_n}{\partial y}+\frac{\partial w_n}{\partial z}=0\end{gathered}$$

sowie

$$(98)\qquad \begin{gathered}-\frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}+F_1^{(n+1)}+\nu\,\Delta u_{n+1}=0,\quad -\frac{\partial p_{n+1}}{\partial y}+F_2^{(n+1)}+\nu\,\Delta v_{n+1}=0,\\ -\frac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+F_3^{(n+1)}+\nu\,\Delta w_{n+1}=0,\qquad \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}+\frac{\partial v_{n+1}}{\partial y}+\frac{\partial w_{n+1}}{\partial z}=0.\end{gathered}$$

Aus (97) und (98) ergibt sich

$$(99)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{p}_n)+F_1^{(n)}-F_1^{(n+1)}&=\nu\,\Delta(u_{n+1}-u_n),\\ \frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{p}_n)+F_2^{(n)}-F_2^{(n+1)}&=\nu\,\Delta(v_{n+1}-v_n),\\ \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{p}_n)+F_3^{(n)}-F_3^{(n+1)}&=\nu\,\Delta(w_{n+1}-w_n).\end{aligned}$$

$$(100)\qquad \frac{\partial}{\partial x}(u_{n+1}-u_n)+\frac{\partial}{\partial y}(v_{n+1}-v_n)+\frac{\partial}{\partial z}(w_{n+1}-w_n)=0,$$

und nach Differentiation und Zusammenfassung

$$(101)\qquad \Delta(\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{p}_n)=\frac{\partial}{\partial x}(F_1^{(n+1)}-F_1^{(n)})+\frac{\partial}{\partial y}(F_2^{(n+1)}-F_2^{(n)})+\frac{\partial}{\partial z}(F_3^{(n+1)}-F_3^{(n)}).$$

Der Randwert der Ortsfunktion $\boldsymbol{p}_{n+1}-\boldsymbol{p}_n$ erfüllt die Beziehungen (96). Beachtet man dies sowie die Ungleichheiten (93)[24]), so erhält man nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie die weiteren, für alle τ in $T+S$ gültigen Relationen

$$(102)\qquad \begin{gathered}|\boldsymbol{p}_{n+1}(\tau)-\boldsymbol{p}_n(\tau)|;\quad \left|\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_{n+1}(\tau)-\boldsymbol{p}_n(\tau))\right|,\ \ldots\leqq\alpha_{10}\,\Omega\,h,\\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_{n+1}(\tau)-\boldsymbol{p}_n(\tau))\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_{n+1}(\tau)-\boldsymbol{p}_n(\tau))\right)^{(2)}\right|,\ \ldots\leqq\alpha_{11}\,\Omega\,h\,d_{12}^{\lambda}.\end{gathered}$$

[24]) Vgl. loc. cit. [8]) S. 243—244.

Auf S ist $u_{n+1} - u_n = 0$. Aus der ersten der Gleichungen (99) folgt mit Rücksicht auf (102), (92) und (93) für alle τ in $T + S$

$$(103)\quad \begin{gathered} |u_{n+1}(\tau) - u_n(\tau)|;\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(u_{n+1} - u_n)\right|, \ldots;\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{n+1} - u_n)\right|, \ldots \leqq \alpha_{12}\Omega h, \ldots, \\ \left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{n+1} - u_n)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{n+1} - u_n)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \alpha_{13}\,\Omega\, h\, d_{12}^{\lambda}. \end{gathered}$$ [25])

Ganz analoge Ungleichheiten gelten augenscheinlich für $v_{n+1} - v_n$ und $w_{n+1} - w_n$.

Ist jetzt, wie wir voraussetzen wollen

$$(104)\quad \Omega \leqq \Omega_0 = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2\alpha_{12}}, \frac{1}{2\alpha_{13}}, \frac{1}{\alpha_{10}}, \frac{1}{\alpha_{11}}\right),$$

so ist

$$(105)\quad \begin{gathered} |u_{n+1} - u_n|,\ |v_{n+1} - v_n|,\ |w_{n+1} - w_n| \leqq \frac{1}{2}h; \\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(u_{n+1} - u_n)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(w_{n+1} - w_n)\right| \leqq \frac{1}{2}h; \\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{n+1} - u_n)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(w_{n+1} - w_n)\right| \leqq \frac{1}{2}h; \\ \left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{n+1} - u_n)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{n+1} - u_n)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \frac{1}{2}h\, d_{12}^{\lambda}. \end{gathered}$$

Wir denken uns jetzt die Ortsfunktionen X, Y, Z, φ, ψ, χ den Ungleichheiten

$$(106)\quad \begin{gathered} |X|, |Y|, |Z|;\ \left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial Z}{\partial z}\right| \leqq \delta_0;\ \left|\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \delta_0\, d_{12}^{\lambda}, \\ |\varphi|, |\psi|, |\chi|;\ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial l}\right|, \left|\frac{\partial \chi}{\partial l}\right| \leqq \delta_0;\ \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \delta_0\, d_{12}^{\lambda}, \end{gathered}$$

gemäß gewählt und nehmen, was gewiß möglich ist, δ_0 so klein an, daß

$$(107)\quad \begin{gathered} |u_1|, |u_2|, \ldots, |w_2|;\ \left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_2}{\partial z}\right|;\ \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}\right| \leqq \frac{1}{4}\Omega_0, \\ \left|\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \frac{1}{4}\Omega_0\, d_{12}^{\lambda} \end{gathered}$$

wird. Offenbar ist

$$(108)\quad \begin{gathered} |u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|, |w_2 - w_1|;\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(u_2 - u_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(w_2 - w_1)\right|; \\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_2 - u_1)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(w_2 - w_1)\right| \leqq \frac{1}{2}\Omega_0, \\ \left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_2 - u_1)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_2 - u_1)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \frac{1}{2}\Omega_0\, d_{12}^{\lambda}. \end{gathered}$$

[25]) Vgl. loc. cit. [24]).

Den vorstehenden Betrachtungen gemäß finden wir sukzessive

$$|u_3 - u_2|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(w_3 - w_2)\right| \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Omega_0 = \frac{1}{4}\,\Omega_0;$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_3 - u_2)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_3 - u_2)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \frac{1}{4}\,\Omega_0\, d_{12}^{\lambda},$$

$$|u_4 - u_3|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(w_4 - w_3)\right| \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\Omega_0 = \frac{1}{8}\,\Omega_0; \tag{109}$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_4 - u_3)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_4 - u_3)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \frac{1}{8}\,\Omega_0\, d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . .

allgemein

$$|u_m - u_{m-1}|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(w_m - w_{m-1})\right| \leqq \frac{1}{2^{m-1}}\,\Omega_0;$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_m - u_{m-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_m - u_{m-1})\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \frac{1}{2^{m-1}}\,\Omega_0\, d_{12}^{\lambda} \quad (m \geqq 3).$$

Die Voraussetzungen für die Anwendung der Beziehungen (105) sind erfüllt. In der Tat ist

$$|u_3| = |u_2 + (u_3 - u_2)| \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0,\ |v_3|, |w_3| \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0; \ldots, \left|\frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0;$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0\, d_{12}^{\lambda},$$

$$|u_4| = |u_2 + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3)| \leqq \frac{5}{8}\,\Omega_0, \ldots, \left|\frac{\partial^2 w_4}{\partial z^2}\right| \leqq \frac{5}{8}\,\Omega_0;$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \frac{5}{8}\,\Omega_0\, d_{12}^{\lambda},$$

. . . . . .

$$|u_m| \leqq \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^{m-1}}\right)\Omega_0 < \Omega_0, \ldots, \left|\frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2}\right| < \Omega_0;$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right|, \ldots < \Omega_0\, d_{12}^{\lambda}.$$

Aus (109) folgt augenscheinlich, daß die unendlichen Reihen

$$u_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(u_k - u_{k-1}), \quad v_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(v_k - v_{k-1}), \quad w_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(w_k - w_{k-1});$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(u_k - u_{k-1}), \ldots, \frac{\partial w_1}{\partial z} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}(w_k - w_{k-1});$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_k - u_{k-1}), \ldots, \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(w_k - w_{k-1})$$

unbedingt und gleichmäßig konvergieren. Es sei

$$u = u_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(u_k - u_{k-1}), \quad v = v_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(v_k - v_{k-1}), \quad w = w_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(w_k - w_{k-1}). \tag{110}$$

Die Funktionen u, v, w sind in $T+S$ stetig und haben daselbst stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung erfüllen wegen (109) eine H-Bedingung

$$\left|\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right|, \ldots, \left|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^{(2)}\right| < \Omega_0 d_{12}^{\lambda}.$$

Aus (102), (89) und (109) mit $m = n$ folgt mit Rücksicht auf (104)

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{p}_{n+1}(\tau) - \boldsymbol{p}_n(\tau)|, \left|\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_{n+1}(\tau) - \boldsymbol{p}_n(\tau))\right|, \ldots \leqq \frac{1}{2^{n-1}}\Omega_0, \\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_n)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_{n+1} - \boldsymbol{p}_n)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \frac{1}{2^{n-1}}\Omega_0 d_{12}^{\lambda} \quad (n \geqq 2). \end{aligned} \tag{111}$$

Die unendlichen Reihen

$$\boldsymbol{p}_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_{k-1}), \frac{\partial \boldsymbol{p}_1}{\partial x} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_{k-1}), \ldots \frac{\partial \boldsymbol{p}_1}{\partial z} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_{k-1})$$

sind demnach unbedingt und gleichmäßig konvergent. Die Funktion

$$\boldsymbol{p}(\tau) = \boldsymbol{p}_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(\boldsymbol{p}_k - \boldsymbol{p}_{k-1}) \tag{112}$$

ist augenscheinlich in $T+S$ nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung erfüllen wegen (111) eine H-Bedingung von der Form

$$\left|\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega_* d_{12}^{\lambda} \qquad (\Omega_* \text{ konstant}). \tag{113}$$

Geht man jetzt in den Formeln (86) und (97) zur Grenze $n \to \infty$ über, so erhält man wegen (110) und (112)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x} + \nu \Delta u + X &= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \\ -\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y} + \nu \Delta u + Y &= u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}, \\ -\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} + \nu \Delta u + Z &= u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{114}$$

d. h. die Gleichungen (1) und (2), von denen wir in § 1 ausgegangen sind. Wie leicht ersichtlich, sind u, v, w auf S entsprechend gleich φ, ψ, χ. Durch geeignete Festsetzung der noch verfügbaren Konstanten p^0 kann man erreichen, daß $\boldsymbol{p}$ in einem vorgegebenen Punkte auf S einen vorgeschriebenen Wert annimmt. Die Funktionen u, v, w, $\boldsymbol{p}$ sind augenscheinlich die gesuchten Lösungen unseres Problems.

Für den Annäherungswert $\boldsymbol{p}_n(\tau)$ des Druckes gilt eine zu (15) analoge Formel. Man erhält sie, indem man u, v, w, Π entsprechend durch u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1}, Π_{n-1} ersetzt. Für $n \to \infty$ erhält man hieraus die Glei-

chung (15). Aus dieser folgt, wie sich leicht zeigen läßt, daß p in T stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung hat. Aus (114) ergibt sich nunmehr, daß u, v, w, wie eingangs vorausgesetzt, im Innern von T stetige, die H-Bedingung befriedigende Ableitungen dritter Ordnung haben.

Anhang.

Es handelt sich um den Nachweis, daß die in der Formel (32) erscheinende Funktion $\bar{p}(\sigma^*)$ stetig ist und stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt. Bekannt ist, daß $\Psi(\sigma^*)$ die gleichen Eigenschaften hat.

Wie wir wissen, ist 1 eine Nullösung der zu (32) gehörigen homogenen Integralgleichung,

$$1 - \frac{1}{4\pi}\int_S \mathfrak{r}^* \frac{\partial^2 G(\sigma^*, \sigma')}{\partial \mathfrak{r}^* \partial n'}\, d\sigma' = 0, \tag{115}$$

oder mit Rücksicht auf (22)

$$1 - \frac{1}{4\pi}\int_S \left(4\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^*}\right) + Q_1(\sigma^*; \sigma')\right) d\sigma' = 0 \tag{116}$$

$$(Q_1(\sigma^*; \sigma') = Q_1(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{z}^*; \sigma')).$$

Wegen

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}^*}\right) d\sigma' = 2\pi$$

folgt hieraus

$$\frac{1}{4\pi}\int_S Q_1(\sigma^*, \sigma')\, d\sigma' = -1. \tag{117}$$

Man überzeugt sich leicht durch Differentiation, daß

$$\mathfrak{r}\frac{\partial^2 G(x, y, z; \sigma')}{\partial \mathfrak{r}\, \partial n'} = (x - x')\frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial n'} + (y - y')\frac{\partial^2 G}{\partial y\, \partial n'} + (z - z')\frac{\partial^2 G}{\partial z\, \partial n'}$$

und darum auch $Q_1(x, y, z; \sigma')$ eine in T reguläre Potentialfunktion darstellt. Für $\mathfrak{r} \to 0$ werden Q_1 und partielle Ableitungen erster Ordnung von Q_1 entsprechend wie $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ und $\frac{1}{\mathfrak{r}^2}$ unendlich (vgl. loc. cit. [5]) S. 246 und 251). Offenbar ist auch

$$\frac{1}{4\pi}\int_S Q_1(x, y, z; \sigma')\, d\sigma'$$

eine in T reguläre Potentialfunktion. Da nun nach (117) unsere Potentialfunktion auf S den konstanten Wert -1 hat, so gilt auch in T

$$\frac{1}{4\pi}\int_S Q_1(x, y, z; \sigma')\, d\sigma' = -1. \tag{118}$$

Aus (32) folgt vor allem, da die für die Auflösbarkeit dieser Integralgleichung notwendige und hinreichende Bedingung gewiß erfüllt ist, daß $\bar{p}(\sigma)$ auf S stetig ist. Betrachten wir jetzt den Ausdruck

$$\int_S r^* \frac{\partial^2 G(\sigma^*, \sigma')}{\partial r^* \partial n'} \bar{p}(\sigma')\, d\sigma' = 4 \int_S \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r^*}\right) \bar{p}(\sigma')\, d\sigma' + \int_S Q_1(\sigma^*, \sigma')\, \bar{p}(\sigma')\, d\sigma'.$$

Der erste Summand rechts erfüllt nach bekannten Sätzen eine H-Bedingung (vgl. loc. cit. [8]). Daß auch der zweite Summand

$$H(\sigma^*) = \int_S Q_1(\sigma^*; \sigma')\, \bar{p}(\sigma')\, d\sigma' \tag{120}$$

die gleiche Eigenschaft hat, läßt sich durch fast wortgetreue Übertragung der Schlüsse erhärten, die beim Beweise des analogen Satzes in der Theorie des Potentials einer einfachen Belegung gebraucht werden (vgl. loc. cit. [8]), wo sich die Literatur angegeben findet).

Aus (32) folgt nunmehr, daß $\bar{p}(\sigma)$ gewiß einer H-Bedingung genügt. Nach bekannten Sätzen hat jetzt der erste Summand rechts in (119) stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung. Wie in der Theorie des Potentials einer einfachen Belegung kann man jetzt zeigen, daß $H(\sigma^*)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial H(\sigma^*)}{\partial l} = \int_S \frac{\partial Q_1}{\partial l} [\bar{p}(\sigma') - \bar{p}(\sigma^*)]\, d\sigma' \tag{121}$$

hat[26]). An dieser Stelle wird von der Tatsache, daß wegen (117)

$$\frac{\partial}{\partial l} \int_S Q_1(\sigma^*; \sigma')\, d\sigma' = 0$$

ist, Gebrauch gemacht. Wie in der Theorie des Potentials einer einfachen Belegung wird von der Formel (121) ausgehend gezeigt, daß $\frac{\partial H(\sigma^*)}{\partial l}$ einer H-Bedingung genügt[27]). Nach (32) hat, wie bewiesen werden sollte, $\bar{p}(\sigma)$ die gleiche Eigenschaft. Es gelten die Formeln (71′) bis (71‴).

[26]) In (121) bezeichnet (l) irgendeine zu S tangentiale Richtung.

[27]) Es kommt hierbei die ohne Schwierigkeit zu verifizierende Tatsache, daß der Cauchysche Hauptwert des uneigentlichen Integrals

$$\int_S \frac{\partial}{\partial l} Q_1(\sigma^*, \sigma')\, d\sigma'$$

existiert, zur Verwendung.

Leipzig, Oktober 1927.

(Eingegangen am 26. Oktober 1927.)

Untersuchungen über Funktionen großer Zahlen.

(Erste Mitteilung.)

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Einleitung.

Bei dem Laplaceschen Problem der Funktionen großer Zahlen handelt es sich darum, ein Momentenintegral vom Typus

$$\Xi(x) = \int_a^b (g(t))^x \Phi(t)\, dt \quad (-\infty < a \leqq t \leqq b < +\infty),$$

wo $|g(t)|$ auf keinem Teilintervall konstant ist, bei großen Werten von x zu beherrschen. Hierbei sollen x, $\Phi(t)$, $g(t)$ der Einfachheit halber (und *nur* darum) reellwertig angenommen werden, und es kann dann bekanntlich ohne Einschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß

$$a = 0, \quad b = 1; \quad g(t) = e^{-\omega(t)}; \quad \omega(0) = 0; \quad 0 < \omega'(t), \quad 0 < t \leqq 1.$$

Laplace hat auf einem, aus mehreren Gründen nicht einwandfreien Wege (formales Rechnen mit divergenten Reihen, gliedweise Integration derselben zwischen 0 und $+\infty$ usw.) einen einfachen Näherungswert von $\Xi(x)$ hergeleitet. Seitdem hat sich über das Problem eine durch Cauchy, Darboux, Poincaré und andere befruchtete große astronomische Literatur entwickelt[1]). Aber erst Herr Perron[2]) hat bewiesen, daß dabei die ersten Glieder einer unendlichen Entwicklung vorliegen, welche die Funktion im Poincaréschen Sinne asymptotisch darstellt. Herr Haar[3]) hat unlängst dieses Ergebnis

[1]) Vgl. Encyklopädie der math. Wiss. II 1_2, S. 885, 901–902, 1082–1083, 1343–1350 (H. Burkhardt) und VI 2 A, S. 636–665 (H. v. Zeipel); s. auch G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze der Analysis I, S. 244. Berlin 1925.

[2]) O. Perron, Münch. Sitzungsber. 1917, S. 191–219; vgl. Journ. f. Math. **151** (1921), S. 76–78.

[3]) A. Haar, Math. Annalen **96** (1926), S. 69–107. Daselbst wird auch die nichtpublizierte Dissertation von Herrn W. Jacobi zitiert.

im Rahmen einer allgemeinen Untersuchung behandelt. — Ich werde hier diese Ergebnisse wesentlich verschärfen und präzisieren, zugleich ihre Prämissen erweitern und auch die Beweise erheblich vereinfachen. Merkwürdigerweise handelt es sich dabei nur um eine moderne Durchführung des Laplaceschen Beweisansatzes, der wegen seiner Lücken preisgegeben und z. T. auch vergessen wurde. Auf Anwendungen soll in dieser ersten Mitteilung, welche auch den Zusammenhang mit der Theorie der divergenten Reihen bzw. der quasianalytischen Funktionen noch nicht näher erörtert, nicht eingegangen werden. — Es sei erwähnt, daß diese elementare Methode nicht nur beim obigen Integral, sondern auch bei komplizierteren asymptotischen Problemen, ferner in der Theorie der linearen Differentialgleichungen usw. zum Ziele führt. Ich werde aber in dieser Note die Methode nur an der Hand des eigentlichen Laplaceschen Problems illustrieren.

Gegenüber der Cauchy-Riemannschen Sattelpunktmethode (méthode des modules principales), ferner der sogenannten Darbouxschen Singularitätenmethode und überhaupt gegenüber allen komplex-analytischen Methoden hat das elementare Verfahren den praktisch entscheidenden Vorteil, daß es bei sinngemäßer Übertragung auch bei mehrfachen Integralen *direkt* (d. h. ohne Reduktion der Variablenanzahl auf Eins, nämlich einfach unter Benutzung der Gauß-Greenschen Formeln der mehrdimensionalen partiellen Integration) zum Ziele führt. Bei Zugrundelegung der vorerwähnten Methoden pflegt die Durchführung des Ansatzes in den störungstheoretischen Anwendungen an der Kompliziertheit der zur Reduktion notwendigen, ins einzelne gehenden algebraischen Kurvendiskussion zu scheitern. So werde ich an einer anderen Stelle mit meiner Methode die ungelösten Konvergenzprobleme der Entwicklung der Störungsfunktion behandeln und übrigens auch die von Poincaré mit sozusagen topologischen Betrachtungen und auf eine schwer zugängliche Weise mehr erschauten als bewiesenen Resultate mit Leichtigkeit und aus einer einheitlichen Quelle ableiten können; letzteres war, auf Anregung von Herrn Lichtenstein, mein eigentliches Ziel*). — Merkwürdigerweise hatten eben diese bzw. ähnliche Probleme der Astronomie bei der Entstehung der Cauchyschen Funktionentheorie, deren ausgiebige Heranziehung für diese Zwecke in Wahrheit überflüssig ist, bekanntlich eine grundlegende Rolle.

*) Zusatz bei der Korrektur (10. 2. 28). Wie ich inzwischen bemerkt habe, würde zur Wiedergewinnung der fraglichen Poincaréschen Sätze [Leçons de mécanique céleste II 1, S. 100ff., Paris 1907] auch schon die im Text angedeutete Methode einen Umweg bedeuten. Man kann nämlich im vorliegenden Falle, wie an einer anderen Stelle näher ausgeführt werden soll, mit potenzreihentheoretischen Betrachtungen ziemlich elementaren Charakters auskommen.

§ 1.

Unbeschränkt differentiierbare Funktionen.

Es sei t eine reelle Veränderliche. Um die Sprach- und Schreibweise zu vereinfachen, — ich betone, nur darum —, sollen alle in Betracht gezogenen Funktionen von t als reellwertig vorausgesetzt werden. Die auf $[0, 1]$ erklärte Funktion $f(t)$ soll daselbst unbeschränkt differentiierbar genannt werden, wenn sie erstens in jedem *inneren* Punkte von $[0, 1]$ eigentliche Ableitungen $[\neq \pm \infty]$ aller Ordnung hat und wenn zweitens die zum Grenzübergang $h \to +0$ gehörigen Grenzwerte $f^{(n)}(+0) = \lim f^{(n)}(h)$, $f^{(n)}(1-0) = \lim f^{(n)}(1-h)$ vorhanden (und endlich) sind. Setzt man $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(+0)$ und $f^{(n)}(1) = f^{(n)}(1-0)$, so hat die für $0 \leqq t \leqq 1$ erklärte Funktion $f^{(n)}$ nach dem Lagrangeschen Mittelwertsatz im Punkte $t = 0$ eine rechte Derivierte, die $= f^{(n+1)}(0)$ ist, und im Punkte $t = 1$ eine linke Derivierte, die den Wert $f^{(n+1)}(1)$ hat; $n = 0, 1, \ldots$. Die Zeichen $f^{(n)}(0)$, $f^{(n)}(1)$ sind im folgenden immer in diesem Sinne zu verstehen. — Wir sagen, daß die auf $[0, \infty]$ erklärte Funktion $f(t)$ daselbst unbeschränkt differentiierbar ist, wenn $f^{(n)}(t)$ für $0 \leqq t < \infty$ vorhanden und $\limsup_{t=\infty} |f^{(n)}(t)| < \infty$; $n = 0, 1, \ldots$ ist. Wir schreiben dabei ∞ für $+\infty$.

Es sei $a_0, a_1, \ldots$ eine beliebige reelle Zahlenfolge und es sei $\delta > 0$. Nach einem Satze von Herrn Borel[4]) gibt es eine in dem Kreise $|t - (1+\delta)| < \delta$ konvergente reelle Potenzreihe $f(t)$ derart, daß der zum Grenzübergang $h \to +0$ gehörige Grenzwert $f^{(n)}(1) = \lim f^{(n)}(1+h)$ vorhanden und $= a_n$ ist; $n = 0, 1, \ldots$. Setzt man $g(t) = e^{\frac{1}{[t-(1+\delta)]^2}} f(t)$ und $g^{(n)}(1) = b_n$, so ist $b_n = \sum_{i=0}^{n} A_{in} a_n$, wobei die A_{in} gewisse absolute Konstanten bezeichnen. Es ist dabei $A_{nn} \neq 0$, so daß zu jeder Folge $\{a_n\}$ genau eine Folge $\{b_n\}$ gehört, und umgekehrt. Nach dem Borelschen Satz gibt es eine auf $[1, 1+\delta]$ unbeschränkt differentiierbare Funktion $h(t)$ derart, daß $h^{(n)}(1) = b_n$ ausfällt. Dann ist aber, wenn $k(t) = e^{-\frac{1}{[t-(1+\delta)]^2}} h(t)$ gesetzt wird, $k(t)$ eine auf $[1, 1+\delta]$ unbeschränkt differentiierbare Funktion derart, daß $k^{(n)}(1) = a_n$ und $k^{(n)}(1+\delta) = k^{(n)}(1+\delta-0) = 0$ ist bei jedem n. Indem man $k(t) = 0$ setzt für $t > 1+\delta$, ergibt sich der folgende

Fortsetzungssatz[5]). *Zu jeder auf* $[0, 1]$ *unbeschränkt differentiierbaren Funktion gibt es eine* (*freilich niemals nur eine*) *auf* $[0, \infty]$ *un-*

[4]) É. Borel, Ann. de l'École Norm. Sup. (3), **12** (1895), S. 35 ff. oder Leçons sur les functions de variables réelles, S. 68—74, Paris 1905 (Collection Borel); vgl. H. v. Koch, Proc. of the fifth intern. Congr. 1912, I, S. 356—359. Cambridge 1913.

[5]) Wegen eines weitergehenden Satzes s. S. 44 der vorher zitierten Thèse von Herrn Borel.

beschränkt differentiierbare (und für $t > \text{const.}$ sogar identisch verschwindende) Funktion, welche auf $[0, 1]$ mit der vorgelegten Funktion übereinstimmt.

§ 2.

Ein asymptotisches Analogon des Lagrangeschen Restgliedes.

Es sei $\omega(t)$ eine für $0 \leqq t < \infty$ erklärte Funktion derart, daß $\omega^{(n)}(t)$ für alle t und n vorhanden ist. Es sei $\omega^{(j)}(0) = 0$, $0 \leqq j < m$ und $\omega^{(m)}(0) \neq 0$, ferner $\omega'(t) > 0$ für $t > 0$ und dabei $\omega(t)$ auf $[0, \infty]$ nicht beschränkt, also gewiß nicht unbeschränkt differentiierbar. Es sei endlich die erste Ableitung der zur Funktion $\sqrt[m]{\omega(t)}$ $(> 0, t > 0)$ inversen Funktion auf $[0, \infty]$ unbeschränkt differentiierbar, wie z. B. im Falle $\omega(t) = t^m$. — Wir sagen dann, daß die Funktion $\omega(t)$ eine Ω_m-Funktion ist.

Die Ω_m-Funktion $\omega(t) = t^m$ ist in einem gewissen Sinne die allgemeinste Ω_m-Funktion. Es gilt nämlich der folgende

Hilfssatz. *Es sei $\Psi(t)$ eine auf $[0, \infty]$ unbeschränkt differentiierbare Funktion und $\omega(t)$ eine Ω_m-Funktion. Man setze*

$$\Phi(t) = \Psi(\omega_m^{-1}(t)) \frac{d}{dt} \omega_m^{-1}(t), \tag{1}$$

wobei $\omega_m^{-1}(t)$ die inverse Funktion der [bei $t = 0$ einfach verschwindenden, mit t monoton ins Unendliche wachsenden, differentiierbaren] Funktion $\omega_m(t) = \sqrt[m]{\omega(t)}$ bedeutet. Dann ist die Funktion $\Phi(t)$ auf $[0, \infty)]$ unbeschränkt differentiierbar,

$$\Phi^{(n)}(0) = \left(\frac{d^n}{dt^n} \frac{\Psi(t)\, t^{n+1}}{(\sqrt[m]{(\omega(t))^{n+1}})} \right)_{t=0} \tag{2}$$

und es ist

$$\int_0^\infty e^{-x\omega(t)} \Psi(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-xt^m} \Phi(t)\, dt. \qquad (x > 0). \tag{3}$$

Zunächst ist die Funktion $\Phi(t)$ auf $[0, \infty]$ unbeschränkt differentiierbar. Denn nach Voraussetzung sind die beiden Funktionen $\Psi(t)$ und $(\omega_m^{-1}(t))'$ auf $[0, \infty]$ unbeschränkt differentiierbar. Die aus (1) folgende Formel (2) ist als der Koeffizientendarstellung der sogenannten Bürgmannschen Verallgemeinerung der Lagrangeschen Reihe bekannt[6]). Die Identität (3) ergibt sich ebenfalls aus (1), wenn in das unter (3) linker Hand stehende Integral $\tau = \sqrt[m]{\omega(t)} = \omega_m(t)$ als unabhängige Veränderliche eingeführt wird.

[6]) Vgl. etwa J. Betrand, Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, Paris 1864, I, S. 312–324 und insbesondere P. L. Tchebychef, Oeuvres I, S. 251–256 St.-Pétersbourg 1899.

Es gilt nun das folgende

Lemma. *Es sei $\Psi(t)$ eine auf $[0,\infty]$ unbeschränkt differentiierbare Funktion und es sei $\omega(t)$ eine Ω_m-Funktion, so daß nach dem Hilfssatz die unter (1) erklärte Funktion $\Phi(t)$ auf $[0,\infty]$ unbeschränkt differentiierbar ist; es bezeichne M_n die obere Grenze von $|\Phi^{(n)}(t)|$ auf $[0,\infty]$. Es gelten dann für $\sqrt[m]{x}>0$ die Beziehungen*

$$(4)\qquad \left|\int_0^\infty e^{-x\omega(t)}\Psi(t)\,dt-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\alpha_{\nu+1}^{[m]}\Phi^{(\nu)}(0)}{(\sqrt[m]{x})^{\nu+1}}\right|\leqq\frac{M_n\alpha_{n+1}^{[m]}}{(\sqrt[m]{x})^{n+1}},\qquad (n=1,2,\ldots)$$

mit

$$(2)\qquad \Phi^{(n)}(0)=\left(\frac{d^n}{dt^n}\frac{\Psi(t)\,t^{n+1}}{\sqrt[m]{(\omega(t))^{n+1}}}\right)_{t=0},$$

und

$$(5)\qquad \alpha_n^{[m]}=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)}{n!}.$$

Mit Rücksicht auf den Hilfssatz kann man beim Beweise ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\omega(t)=t^m$, also [wegen (1)] $\Phi(t)\equiv\Psi(t)$ ist.

Das Lemma besagt also, daß, wenn $\Phi(t)$ eine beliebige auf $[0,\infty]$ unbeschränkt differentiierbare Funktion und M_n die obere Grenze von $|\Phi^{(n)}(t)|$ auf $[0,\infty]$ bezeichnet, für $\sqrt[m]{x}>0$ die Ungleichheiten

$$(6)\qquad \left|\int_0^\infty e^{-t^m x}\Phi(t)\,dt-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\alpha_{\nu+1}^{[m]}\Phi^{(\nu)}(0)}{(\sqrt[m]{x})^{\nu+1}}\right|\leqq\frac{M_n\alpha_{n+1}^{[m]}}{(\sqrt[m]{x})^{n+1}}\qquad (n=1,2,\ldots)$$

bestehen, wobei die absoluten Konstanten α durch (5) gegeben sind. — Um (6) zu beweisen, führen wir vorübergehend die Transzendenten

$$\Theta_{m0}^{[x]}(t)=-e^{-xt^m}\qquad \Theta_{mn}^{[x]}(t)=-\int_t^\infty\Theta_{mn-1}^{[x]}(u)\,du;$$

ein und finden wegen

$$\begin{aligned}\Theta_{mn}^{[x]}(t)\,\Phi^{(n-1)}(t)\Big|_0^\infty&=-\Theta_{mn}^{[x]}(0)\,\Phi^{(n-1)}(0)+\lim_{t=\infty}\Theta_{mn}^{[x]}(t)\,\Phi^{(n-1)}(t)\\&=-\Theta_{mn}^{[x]}(0)\,\Phi^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-xt^m}\Phi(t)\,dt&=-\Theta_{m1}^{[x]}(0)\,\Phi(0)-\int_0^\infty\Theta_{m1}^{[x]}(t)\,\Phi'(t)\,dt\\&=-\Theta_{m1}^{[x]}(0)\,\Phi(0)+\Theta_{m2}^{[x]}(0)\,\Phi'(0)+\int_0^\infty\Theta_{m2}^{[x]}(t)\,\Phi''(t)\,dt\\&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&=\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu+1}\Theta_{m\nu+1}^{[x]}(0)\,\Phi^{(\nu)}(0)+(-1)^n\int_0^\infty\Theta_{mn}^{[x]}(t)\,\Phi^{(n)}(t)\,d\end{aligned}$$

Dabei ist das letzte Integral dem Betrage nach

$$\leqq M_n \int_0^\infty |\Theta_{m\,n}^{[x]}(t)|\,dt = M_n \int_0^\infty (-1)^n \Theta_{m\,n}^{[x]}(t)\,dt = (-1)^{n+1} M_n \Theta_{m\,n+1}^{[x]}(0).$$

Ferner ist

$$-\Theta_{m\,1}^{[x]}(0) = \int_0^\infty e^{-xu^m}\,du,$$

$$\Theta_{m\,2}^{[x]}(0) = \int_0^\infty -\Theta_{m\,1}^{[x]}(t)\,dt = \int_0^\infty -du_2 \int_{u_2}^\infty -e^{-xu_1^m}\,du_1$$

$$= \int_0^\infty du_2 \int_0^\infty e^{-x(u_1+u_2)^m}\,du_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x(u_1+u_2)^m}\,du_1\,du_2,$$

. . . . . .

$$(-1)^n \Theta_{m\,n}^{[x]}(0) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-x(u_1+u_2+\dots+u_n)^m}\,du_1\,du_2 \dots du_n,$$

also

$$(-1)^n \Theta_{m\,n}^{[x]}(0) = \frac{1}{(\sqrt[m]{x})^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(u_1+u_2+\dots+u_n)^m}\,du_1\,du_2 \dots du_n.$$

Damit ist (6), also auch das Lemma im wesentlichen bereits bewiesen. Es handelt sich jetzt nur darum, ob die Werte der absoluten Konstanten unter (5) richtig angegeben sind, d. h. ob

$$(7) \qquad \frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}{m\,\Gamma(n)} = \alpha_n^{[m]} = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^m} du_1\,du_2 \dots du_n \quad (n, m = 1, 2, \dots)$$

gilt. Der Vollständigkeit halber soll auch (5), d. h. (7) bewiesen werden.

§ 3.

Auswertung der absoluten Koeffizienten.

Es bezeichne $\mathfrak{S}_n(\varrho)$ den durch die Ungleichheiten $\xi_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ bestimmten 2^n-ten Teil der Oberfläche $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \varrho^2$ des n-dimensionalen Kugelkörpers $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leqq \varrho^2$, so daß der Bereich $\mathfrak{S}_n(\varrho)$ der Oberfläche durch die Ungleichheiten $0 \leqq \varphi_i \leqq \frac{\pi}{2}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ charakterisiert wird, wenn

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \varrho \cos\varphi_1,\\
\xi_2 &= \varrho \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,\\
\xi_3 &= \varrho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\xi_{n-1} &= \varrho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \dots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1},\\
\xi_n &= \varrho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \dots \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

gilt. Da im Quadrate

$$\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2=\varrho^2\left[(d\varphi_1)^2+\sum_{\mu=2}^{n-1}(d\varphi_\mu)^2\prod_{\nu=1}^{\mu-1}(\sin\varphi_\nu)^2\right]\equiv\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}g_{jl}\,d\varphi_j\,d\varphi_l$$

des Linienelementes von $\mathfrak{S}_n(\varrho)$ die nichtdiagonalen Fundamentalgrößen $(j\neq l)$ verschwinden, so ist dabei das Quadrat des Abbildungsmoduls einfach das Produkt der diagonalen Fundamentalgrößen:

$$\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}d\xi_i}{\prod_{i=1}^{n-1}d\varphi_i}\right]^2=\prod_{\mu=1}^{n-1}g_{\mu\mu}=\varrho^{2(n-1)}\prod_{\mu=2}^{n-1}\prod_{\nu=1}^{\mu-1}(\sin\varphi_\nu)^2=\left[\varrho^{n-1}\prod_{\mu=1}^{n-2}\prod_{\nu=1}^{\mu}\sin\varphi_\nu\right]^2$$

$$=\left[\varrho^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}(\sin\varphi_\nu)^{n-\nu-1}\right]^2,$$

so daß wegen

$$\prod_{i=1}^{n}\xi_i=\varrho^n\prod_{\nu=1}^{n-1}\cos\varphi_\nu(\sin\varphi_\nu)^{n-\nu}$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi(\sin\varphi)^{2N-1}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{2N-1}\,d(\sin\varphi)=\int_0^1\eta^{2N-1}\,d\eta=\frac{1}{2N}$$

das $(n-1)$-dimensionale Integral

$$\sigma_n(\varrho)=\int_{\mathfrak{S}_n(\varrho)}\prod_{i=1}^{n}\xi_i\,d\xi_i=\int_{\mathfrak{S}_n(\varrho)}\left[\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right]\left[\prod_{i=1}^{n}d\xi_i\right]$$

$$=\int_{\mathfrak{S}_n(\varrho)}\left[\varrho^n\prod_{\nu=1}^{n-1}\cos\varphi_\nu(\sin\varphi_\nu)^{n-\nu}\right]\left[\varrho^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}(\sin\varphi_\nu)^{n-\nu-1}\,d\varphi_\nu\right]$$

$$=\varrho^{2n-1}\int_{\mathfrak{S}_n(\varrho)}\prod_{\nu=1}^{n-1}\cos\varphi_\nu(\sin\varphi_\nu)^{2(n-\nu)-1}\,d\varphi_\nu$$

$$=\varrho^{2n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi_\nu(\sin\varphi_\nu)^{2(n-\nu)-1}\,d\varphi_\nu=\varrho^{2n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{2(n-\nu)}=\frac{\varrho^{2n-1}}{2^{n-1}(n-$$

also

$$\sigma_n(\varrho)=\varrho^{2n-1}\sigma_n(1),\qquad\sigma_n(1)=\frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n)}.$$

ist. Führt man daher in das Integral (7) zuerst die Substitution $u_i = \xi_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und sodann die Polarkoordinaten ein, so folgt[7])

$$\frac{1}{2^n}\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^m}\prod_{i=1}^n du_i$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^m}\prod_{i=1}^n \xi_i\, d\xi_i = \int_0^\infty e^{-(\varrho^2)^m}\sigma_n(\varrho)\,d\varrho = \sigma_n(1)\int_0^\infty e^{-\varrho^{2m}}\varrho^{2n-1}\,d\varrho$$

$$= \sigma_n(1)\int_0^\infty e^{-\varrho}\varrho^{\frac{2n-1}{2m}}\,d\left(\varrho^{\frac{1}{2m}}\right) = \frac{\sigma_n(1)}{2m}\int_0^\infty e^{-\varrho}\varrho^{\frac{2n-1}{2m}+\frac{1}{2m}-1}\,d\varrho$$

$$= \frac{\sigma_n(1)}{2m}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2m}+\frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2^{n-1}\Gamma(n)}\,\Gamma\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{2^n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}{m\,\Gamma(n)},$$

womit (7) bewiesen ist, freilich nur für $n > 1$ (denn im n-dimensionalen Raume hat man nur $n-1$ Polarwinkel). Ist aber $n = 1$, so geht das Integral (7) in

$$\int_0^\infty e^{-u^m}\,du = \int_0^\infty e^{-u}\,d\left(u^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{m}-1}\,du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{m}$$

über, so daß (7) auch bei $n = 1$ gilt. Aus dem Beweise geht hervor, daß (7) auch dann besteht, wenn m nicht positiv und ganzzahlig ist, sondern nur $\Re(m) > 0$ vorausgesetzt wird (bei der Potenzierung den Hauptzweig verstanden). Auch (6) könnte dementsprechend verallgemeinert werden. Es sei in diesem Zusammenhang erwähnt, daß das Lemma auf den Fall eines Winkelgebietes $\Re\left(\sqrt[m]{x}\right) > 0$ unmittelbar übertragen werden kann.

Für $m = 1$ folgt $\alpha_n^{[1]} = 1$ bei jedem n. In diesem Falle ist das Lemma bekannt[8]). In diesem Grenzfalle sind jedoch die Verhältnisse so einfach, daß der wahre Charakter des Problems noch nicht hervortreten kann. Denn man hat einfach

$$\int_0^\infty e^{-xt}\Phi(t)\,dt = \frac{\Phi(0)}{x} + \int_0^\infty e^{-xt}\Phi'(t)\,dt = \frac{\Phi(0)}{x} + \frac{\Phi'(0)}{x^2} + \int_0^\infty e^{-xt}\Phi''(t)\,dt = \ldots.$$

[7]) Man beachte nur, daß in der sphärischen Grundform des *n-dimensionalen Raumes* der Koeffizient von $(d\varrho)^2$ auch von ϱ unabhängig, nämlich $= 1$ ist.

[8]) Siehe z. B. S. 68 des unter [14]) zitierten Buches von Herrn Carleman.

Im störungstheoretischen Falle $m = 2$ folgt

$$(8) \qquad \alpha_{2n}^{[2]} = \frac{\Gamma(n)}{2\,\Gamma(2n)}; \quad \alpha_{2n+1}^{[2]} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma(2n+1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

im Einklang mit dem Ergebnis von Laplace[1]).

Das Integral (6) geht im Falle $m = 1$ in die Laplacesche Transformierte (Unterfunktion) von $\Phi(x)$, im Falle $m = 2$ in das Laplace-Weierstraßsche Wärmeleitungsintegral über. Das zu beliebigem m gehörige Integral hängt mit gewissen Verallgemeinerungen[9]) des gewöhnlichen Borelschen Summationsverfahrens bzw. mit den Mittag-Lefflerschen E_α-Funktionen $\left(\alpha = \frac{1}{m}\right)$ zusammen.

Um ein Analogon des Lagrangeschen Restgliedes der Taylorschen Formel zu gewinnen, haben wir oben das Restintegral einfach mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes abgeschätzt. Für andere Zwecke ist jedoch vorteilhafter, die Schwarzsche Ungleichheit heranzuziehen.

Wie aus dem obigen hervorgeht, können Integrale wie

$$\int_0^\infty t^\nu (\log t)^\mu \, e^{-t^m x}\, dt \qquad (\Re(\nu) > -1,\ \Re(\mu) > 0)$$

usw. ebenso behandelt werden. Nur ist dabei im allgemeinen nicht möglich, die Koeffizientenintegrale auf bekannte Funktionen zurückzuführen, was freilich nicht einmal eine praktisch-rechnerische Erschwerung bedeutet.

Es sei schließlich erwähnt, daß die Formel (7) nicht neu ist. Denn Raabe[10]) hat durch vollständige Induktion die (für $n = 1$ triviale) Reduktionsformel

$$\underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n} f\left(\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu x_\mu^{s_\mu}\right) \prod_{\nu=1}^{n} x_\nu^{r_\nu - 1}\, dx_\nu = \left[\frac{2}{\Gamma\left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{r_\mu}{s_\mu}\right)} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{r_\nu}{s_\nu}\right)}{a_\nu^{\frac{r_\nu}{s_\nu}}\, s_\nu}\right] \int_0^\infty f(x^2)\, x^{-1+2\sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu}{s_\nu}}\, dx$$

gefunden. Setzt man hierin $f(x) = e^{-x^m}$ und $a_\nu = s_\nu = r_\nu = 1$ bei jedem ν (die Gültigkeitsbedingungen der Identität sind dann reichlich erfüllt), so

[9]) Vgl. É. Borel, Journ. de Math. (5) **2** (1896), S. 120—121; É. Borel, Ann. de l'École Norm. Sup. (3) **16** (1899), S. 77; É. Le Roy, Annales de Toulouse (2) **2** (1900), S. 416ff.; G. H. Hardy, Quarterly Journ. of Math. **35** (1904), S. 35; O. Perron, Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 291. Vgl. auch die Berliner Dissertation (1908) von Herrn W. Schnee, auf die er mich freundlichst aufmerksam gemacht hat.

[10]) J. L. Raabe, Journ. für Math. **28** (1844), S. 19—27.

geht der Ausdruck rechter Hand in

$$\frac{2}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-x^{2m}}x^{2n-1}\,dx=\frac{2}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{2n-1}{2m}}\frac{x^{\frac{1}{2m}-1}}{2m}\,dx$$

$$=\frac{1}{m\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-x}x^{\frac{n}{m}-1}\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}{m\Gamma(n)},$$

also die Raabesche Formel in (7) über. Umgekehrt erweist sich die obige Methode, die der üblichen Auswertung des Laplaceschen Integrals $\Gamma(\frac{1}{2})$ auf eine naheliegende Weise nachgebildet ist, offenbar auch zur Begründung der Raabeschen Formel geeignet.

§ 4.

Isolierung der asymptotisch nicht belanglosen Punkte.

Es sollen die Voraussetzungen und Bezeichnungen des Lemmas beibehalten werden. Es sei $\varepsilon>0$. Man hat

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-x\omega(t)}\Psi(t)\,dt=e^{-x\omega(\varepsilon)}\int_0^\infty e^{-x[\omega(t+\varepsilon)-\omega(\varepsilon)]}\Psi(t+\varepsilon)\,dt.$$

Da $\omega(t)$ eine Ω_m-Funktion ist, so ist $\omega'(t)>0$ für $t>0$, also auch für $t=\varepsilon$, so daß die Funktion $\lambda_\varepsilon(t)=\omega(t+\varepsilon)-\omega(\varepsilon)$ eine Ω_1-Funktion ist. Wegen $\alpha_n^{[1]}=1$ und nach dem Lemma ist daher

$$\int_0^\infty e^{-x\lambda_\varepsilon(t)}\Psi(t+\varepsilon)\,dt=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Phi_\varepsilon^{(\nu)}(0)}{x^{\nu+1}}+\vartheta_n(x)\frac{M_{n\varepsilon}}{x^{n+1}}\qquad(|\vartheta_n(x)|\leqq 1),$$

wobei $M_{n\varepsilon}$ die obere Grenze des Betrages der n-ten Ableitung der auf $[0,\infty]$ unbeschränkt differentiierbaren Funktion

$$(1')\qquad \Phi_\varepsilon(t)=\Psi(\varepsilon+\lambda_\varepsilon^{-1}(t))\frac{d\lambda_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}$$

und $\lambda_\varepsilon^{-1}(t)$ die zu $\lambda_\varepsilon(t)$ inverse Funktion bezeichnet. Da die Funktion $x^n e^{-x}$ ihr Maximum für $x=n$ annimmt, so ist nach Stirling

$$x^n e^{-x}\leqq n^n e^{-n}=\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}}e^{-\frac{\vartheta_n}{12n}}<n!\qquad(0<\vartheta_n<1),$$

also

$$(0<)\,e^{-x\omega(\varepsilon)}<\frac{(n+1)!}{[x\omega(\varepsilon)]^{n+1}}$$

mithin

$$\left|\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x\omega(t)}\Psi(t)\,dt\right| = \left|e^{-x\omega(\varepsilon)}\int_{0}^{\infty} e^{-x\lambda_{\varepsilon}(t)}\Psi(t+\varepsilon)\,dt\right|$$

$$\leqq \frac{(n+1)!}{[x\,\omega(\varepsilon)]^{n+1}}\left(\frac{M_{n\varepsilon}}{x^{n+1}} + \left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Phi_{\varepsilon}^{(\nu)}(0)}{x^{\nu+1}}\right|\right)$$

für $x>0$, also erst recht für $x\geqq 1$, wo $\sqrt[m]{x}\leqq x$. Es gilt demnach der folgende

Lokalisationssatz. *Unter den Voraussetzungen des Lemmas bestehen für $x\geqq 1$ die Ungleichheiten*

$$(9)\qquad \left|\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x\omega(t)}\Psi(t)\,dt\right| \leqq \frac{(n+1)!}{[\omega(\varepsilon)]^{n+1}}\left(\frac{M_{n\varepsilon}}{(\sqrt[m]{x})^{n+1}} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{|\Phi_{\varepsilon}^{(\nu)}(0)|}{(\sqrt[m]{x})^{\nu+1}}\right)$$

$$(n=1,2,\ldots),$$

wobei ε eine beliebige positive Zahl, $\Phi_{\varepsilon}(t)$ die auf $[0,\infty]$ unbeschränkt differentiierbare Funktion (1′) und $M_{n\varepsilon}$ die obere Grenze von $|\Phi_{\varepsilon}^{(n)}(t)|$ auf $[0,\infty]$ bezeichnet.

Mit Rücksicht auf das Lemma folgt daraus unser

Hauptsatz. *Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen des Lemmas und des Lokalisationssatzes bestehen für $\sqrt[m]{x}\geqq 1$ die Ungleichheiten*

$$(10)\qquad \left|\int_{0}^{1} e^{-x\omega(t)}\Psi(t)\,dt - \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\alpha_{\nu+1}^{[m]}\Phi^{(\nu)}(0)}{(\sqrt[m]{x})^{\nu+1}}\right| \leqq \frac{\Lambda_n}{(\sqrt[m]{x})^{n+1}} \qquad (n=1,2,\ldots,$$

mit

$$\Lambda_n = \alpha_{n+1}^{[m]}M_n + \frac{(n+1)!}{[\omega(1)]^{n+1}}\left(M_{n1} + \sum_{\nu=0}^{n-1}|\Phi_1^{(\nu)}(0)|\right).$$

§ 5.

Durchführung des Laplaceschen Beweisansatzes.

Es seien jetzt umgekehrt $\Psi(t)$ und $\omega(t)$ beliebige, auf $[0,1]$ unbeschränkt differentiierbare Funktionen derart, daß $\omega^{(j)}(0)=0$, $0\leqq j<m$; $\omega^{(m)}(0)\neq 0$, ferner $\omega'(t)>0$ für $0<t\leqq 1$ ist. Dann gibt es eine Zahlenfolge $\{\Lambda_n\}$ derart, daß die Ungleichheit (10) für alle $n\geqq 1$ und etwa für $x>1$ besteht, wobei die Koeffizienten durch (2) und (5) erklärt sind.

Beweis. Da $\omega(t)$ mit t verschwindet und durchweg wächst, ferner mit x multipliziert ist, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\omega(1)=1$ ist. Es bezeichne $\omega_m^{-1}(t)$ die zu $\omega_m(t)=\sqrt[m]{\omega(t)}$

inverse, auf $[0, 1]$ erklärte, mit t von 0 bis 1 wachsende, differentiierbare Funktion. Man erkläre für $0 \leqq t \leqq 1$ die daselbst unbeschränkt differentiierbare [vgl. nämlich (2)] Funktion $\Phi(t)$ durch die Formel (1), so daß (2) auch jetzt besteht und

$$(3') \qquad \int_0^1 e^{-x\omega(t)} \Psi(t)\, dt = \int_0^1 e^{-xt^m} \Phi(t)\, dt$$

ist. Da die Funktion $\Phi(t)$ auf $[0, 1]$ unbeschränkt differentiierbar ist, so kann sie mit Benutzung des Fortsetzungssatzes zu einer auf $[0, \infty]$ unbeschränkt differentiierbaren Funktion ergänzt werden. Mit Rücksicht auf den Hauptsatz ist damit die Behauptung bewiesen.

Die eigentliche Achillesferse des Laplaceschen Beweisansatzes war der Übergang von $\int_0^1$ zu $\int_0^\infty$. Andererseits wäre der Fall $\int_0^1$ der Laplaceschen (d. h. im wesentlichen: der obigen) Methode direkt nicht so leicht zugänglich. Denn es ist für die obige Beweisanordnung wesentlich, daß die ausintegrierten Bestandteille nur an dem Endpunkt $t = 0$ nicht verschwinden sollen. Man kann sogar sagen, daß man sich bei der Perronschen Methode und überhaupt bei den funktionentheoretischen Methoden des Residuensatzes zum großen Teil zu dem Zwecke bedient, um die endliche Strecke in einen ins Unendliche laufenden Integrationsweg deformieren zu können. Wir haben diesen methodischen Umweg dadurch vermeiden können, daß wir die Klasse der holomorphen Funktionen auf $[0, 1]$ durch eine wesentlich weniger enge Klasse ersetzt haben. Dies ist der springende Punkt; denn eine auf $[0, 1]$ holomorphe Funktion kann man im allgemeinen nicht zu einer auf $[0, \infty]$ auch nur schlechthin holomorphen Funktion ergänzen.

In (10) ist die linke Seite $= O\left(\frac{1}{\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n+1}}\right)$, also erst recht $o\left(\frac{1}{\left(\sqrt[m]{x}\right)^{n}}\right)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, so daß mit dem Poincaréschen Symbol der Asymptotizität für $x \to \infty$ die Darstellung

$$(11) \qquad \int_0^1 e^{-x\omega(t)} \Psi(t)\, dt \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\nu+1}^{[m]} \Phi^{(\nu)}(0)}{\left(\sqrt[m]{x}\right)^{\nu+1}}$$

gilt. Die Existenz von Zahlen $\alpha_{\nu+1}^{[m]}$, für welche diese Relation besteht, wurde in dem Falle, wenn die Funktionen $\omega(t)$ und $\Psi(t)$ auf $[0, 1]$ holomorph sind, durch die Entdeckung von Herrn Perron sichergestellt[11]) (früher wurde der asymptotische Charakter der Entwicklung von Funktionen großer Zahlen im allgemeinen Falle nur vermutet oder ohne Beweis als selbstverständlich betrachtet). In diesem Spezialfall geht unser Resultat

[11]) Vgl. hierzu z. B. M. Hamy, Journ. de Math. (6) 4 (1908), S. 239.

über dasjenige der Herren Perron und Haar einerseits mit Rücksicht auf die Koeffizientenbestimmung (2), (5) hinaus (welche freilich auch aus den Perronschen Formeln abgelesen werden kann), andererseits aber mit Rücksicht auf ein grundsätzliches Problem[12]), zu welchem wir nun übergehen.

§ 6.

Analytische Asymptotizität und numerische Semikonvergenz.

Bei numerischen Rechnungen (aber auch bei Konvergenzuntersuchungen u. dgl.) konnte man sich bisher eigentlich immer auf die beiden ersten Glieder, meistens sogar auf das erste Glied der asymptotischen Entwicklung eines Integrals (3) beschränken, indem x so groß war, daß dabei der relative Fehler hinreichend klein ausfiel. Denken wir uns aber einen idealen Kalkulator, der etwa das Integral (11), welches mit $F(X)$ $[X=\sqrt[n]{x}]$ bezeichnet werden soll, bei „unendlich vielen" und über alle Grenzen wachsenden Werten von X benötigt. Was würde er zur Poincaréschen Definition

$$\lim_{X=\infty} X^{n+1}\left[F(X)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu}{X^{\nu+1}}\right]=0 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{12}$$

der Asymptotizität sagen? Würde er im Bestehen dieser Grenzgleichungen die grundsätzliche Aufklärung der Frage erblicken, warum denn seine mit Hilfe der Reihe berechneten Ziffern einen geeigneten Wert ergeben? M. a. W., würde er, wenn er über die Reihe noch keine numerischen Erfahrungen hat, auf Grund von (12) erwarten können, daß die Reihe praktisch brauchbar sein wird? Keinesfalls; der Poincarésche Begriff der Asymptotizität ist zu weit gefaßt, um von dem „semikonvergenten" Verlauf der Entwicklung prinzipiell Rechenschaft geben zu können. Die (auch in Anbetracht des Beweises mit Hilfe von partiellen Integrationen) völlig analoge Euler-Maclaurinsche Summenformel ist im Poincaréschen Sinne gewissermaßen ebenfalls asymptotisch, es wäre aber absurd, die numerische Brauchbarkeit derselben (und zwar nicht nur bei festem n) damit als abgetan zu betrachten; man weiß ja, wie viele Untersuchungen der Analysierung des Restintegrals gegolten haben.

Die Formel (12) besagt nur, daß bei jedem *festen* n eine Zahl R_n aufgefunden werden kann derart, daß, wenn man aus der Reihe nur die n ersten Glieder beibehält, der dadurch begangene *relative* Fehler vernachlässigt werden kann, wenn $X > R_n$ ist. Hingegen sagt (12) gar nichts darüber aus, auf welche Weise R_n von n abhängig ist. Ich denke freilich *nicht* daran, daß das Restglied bei festem n nicht angegeben wird

[12]) Des näheren soll darauf später eingegangen werden.

(dies ist eine sekundäre Frage), sondern ich denke an den oben definierten idealen Kalkulator, der die Funktionswerte $F(X_i)$, wobei $X_i \to \infty$, berechnen will und im Zweifel ist, ob nicht R_n — oder, was dasselbe ist, der maximale *absolute* Fehler — mit n so stark anwächst, daß er die Entwicklung bei seiner Aufgaben*serie* nicht brauchen kann; hierbei ist n als eine vorgeschriebene Funktion von i zu betrachten. — Die Sache ist viel komplizierter, als etwa bei einer von X unabhängigen Reihe, deren Restglied nicht angegeben wird. Denn es handelt sich um eine *unendliche Folge* von vorzunehmenden, jedoch nicht vorgenommenen Grenzübergängen.

Man kann der obigen Fragestellung leicht ersichtlich eine andere Fassung geben. Ist in (12) jedes $c_\nu = 0$, so sagen wir, daß $F(X)$ asymptotisch-identisch verschwindet, wie z. B. dies beim Integrale (9) der Fall ist. Woher soll nun unser idealer Kalkulator wissen, daß, indem er die Entwicklung heranzieht, er damit tatsächlich das Integral (6) berechnet und nicht eine andere Funktion, welche sich vom Integrale (6) in einer additiven, asymptotisch-identisch verschwindenden Funktion unterscheidet? Unsere Methode gestattet nun, das Problem mit Heranziehung der Borel-Carlemanschen Theorie der quasianalytischen Funktionen unmittelbar in Angriff zu nehmen und unter den Verhältnissen, die in den störungstheoretischen Anwendungnn meistens vorliegen, auch zu erledigen. Auf die Durchführung der rechnerischen Einzelheiten will ich jetzt nicht eingehen. — Es handelt sich dabei, grob ausgedrückt, um folgendes. Ist etwa für alle hinreichend großen $\Re(X)$

$$\left| F(X) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{c_\nu}{X^{\nu+1}} \right| < \frac{\Lambda_n}{X^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei $\{c_n\}$ eine gegebene, $\{\Lambda_n\}$ eine beliebig wählbare Zahlenfolge bezeichnet, so gibt es unendlich viele verschiedene Funktionen $F(X)$, für welche diese Ungleichheiten erfüllt sind. Hingegen gibt es nur eine, diese Ungleichheiten befriedigende[13]) Funktion $F(X)$, wenn dabei die Folge $\{\Lambda_n\}$ fest vorgeschrieben und mit n nicht allzu stark wachsend ist [vgl. (8)][14]). Wegen einer präziseren Fassung dieses Satzes soll auf das soeben zitierte Buch von Herrn Carleman verwiesen werden.

[13]) Dies liegt ganz im Rahmen des von Poincaré [Bull. Soc. Math. de France **13** (1885), S. 27; **14** (1886), S. 82] formulierten Prinzips: „... *égalites* en nombre infini peuvent être remplacées par des *inégalites* en nombre infini." Vgl. hierzu die oben zitierte Arbeit von H. v. Koch

[14]) T. Carleman, Les fonctions quasi analitiques, Paris 1926 (Collection Borel).

(Eingegangen am 12. Dezember 1927.)

Über die Existenz der Hillschen Mondbahn of maximum lunation und der Poincaréschen Schlingbahnen.

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Einleitung.

In einem früheren Aufsatz[1]) habe ich den von Hill[2]) als Desideratum formulierten[3]) direkten Existenzbeweis seiner Variationskurve für solche Monde geführt, bei welchen der Quotient der synodischen Mondperiode zur siderischen Sonnenperiode hinreichend klein und insbesondere gewiß nicht von höherer Größenordnung ist als beim Erdmond; die Existenzfrage ist dabei mit einer gewissen, zu einem unendlichen impliziten (weder linearen noch rekursiven) Bedingungsgleichungsystem gehörigen Konvergenzfrage äquivalent. Mit Rücksicht auf die Hillschen numerischen Rechnungen wäre es sehr wohl möglich, daß der Existenzbereich der Lösung aus den Konvergenzkreisen der nach den Potenzen des Periodenquotienten fortschreitenden Maclaurinreihen herausragt. Ich werde jetzt dennoch die Existenz sämtlicher von Hill überhaupt in Betracht gezogener Variationskurven, und auch die der abschließenden Lösung of maximum lunation, ja auch derjenigen sich daran anschließenden Schlingbahnen im Sinne der Präzisionsmathematik beweisen können, welche von Poincaré[4]) auf Grund

[1]) Zur Hillschen Theorie der Variation des Mondes, Math. Zeitschr. **24** S. 259—265 (1925).

[2]) G. W. Hill, Researches in the lunar theory, Coll. Math. Works **1**, (Washington 1905), S. 284—335.

[3]) Gemeint ist der Absatz auf S. 287: I regret that, on account of the difficulty of the subject and the length of the investigation it seems to require, I have been obliged to pass over the important questions of the limits between which the series are convergent ... it does not appear that anything in the writings of Cauchy will help us to the conditions of convergence.

[4]) H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, **1** S. 106—109, Paris 1892.

einer heuristischen Schußweise gewonnen wurden. Den Beweis führe ich derart, daß ich eine klassische, sich auf analytische Fortsetzbarkeit beziehende (auch Weierstraß[5]) bekannt gewesene) Stabilitätsschlußweise von Herrn Painlevé[6]) an die früher von mir bewiesenen Existenzsätze[7]) über unendliche Gleichungssysteme sinngemäß anpasse, die Variationskurven auf Grund des unendlichen Systems von Bedingungsgleichungen analytisch fortsetze[8]) und dabei einen gewissen von Hill numerisch sehr genau geprüften qualitativen Sachverhalt wesentlich verwerte für ein festes, endliches Zeitintervall (welches übrigens noch kleiner ist, als das von Hill betrachtete). Man beachte, daß die Variationskurven, die hinreichend nahe an der Lösung of maximum lunation verlaufen, sich schon keiner geschlossenen Grenzkurve der Nullgeschwindigkeit erfreuen (das Vorhandensein geschlossener Grenzkurven würde den Beweis wesentlich erleichtern). — Es scheint mir, daß sich durch ähnliche Überlegungen die Existenz mancher anderer numerisch gefundener periodischer Lösungen (Thiele, Burrau) feststellen läßt. Auf die Mondtheorie von Herrn Brown hoffe ich später zurückkommen zu können.

§ 1.

Die Symmetriebedingung.

Die Hillschen Bewegungsgleichungen sind die von der Sonnenparallaxe befreiten Gleichungen des restringierten Mondproblems; die Koordinaten des Mondes werden auf dasjenige (rotierende) Achsenkreuz bezogen, bei welchem die Syzigien in der x-Achse, die Quadraturen in der y-Achse geschehen, so daß also die Erde im Punkte $x = y = 0$ und die parallaktenlose Sonne auf der x-Achse gelegen ist; in den Hillschen kanonischen Einheiten hat man[9])

$$\ddot{x} - 2\dot{y} + \frac{x}{r^3} = 3x; \qquad \ddot{y} + 2\dot{x} + \frac{y}{r^3} = 0$$

mit $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$, $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, wobei die Multiplikatoren $\dot{x}, \dot{y}$ zum Jacobischen Integral

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{r} - \frac{3}{2}x^2 = C$$

[5]) K. Weierstraß, Acta Math. **35** S. 37 ff. (1912).

[6]) P. Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations differentielles professées a Stockholm 1895, S. 571 ff. Paris (lith.)

[7]) Außer [1]) vgl. wegen seiner Beziehungen zur Mondtheorie auch meine Arbeit: Über die Differentialgleichungen der Himmelsmechanik, Math. Ann. **96** S. 284 ff. (1926).

[8]) Vgl. hierzu den zweiten Teil meiner Note: Zur Theorie der unendlichen Differentialsysteme, Math. Ann. **95** S. 544—556 (1926).

[9]) loc. cit. [2]), S. 293 (wobei das Vorzeichen von $2\dot{x}$ druckfehlerhaft ist).

führen. Wir betrachten nur solche (reelle) Lösungen, die mit der negativen y-Halbachse mindestens einen Punkt gemein haben und wählen $t = 0$ derart, daß $x(0) = 0$, $y(0) < 0$ gilt. Die Partikularlösungen mit $y(t) = y(-t)$ und $\dot{x}(0) \neq 0$ nennen wir quadraturorthogonal; sie passieren die y-Achse gewiß rechtwinklig für $t = 0$. Diejenigen quadraturorthogonalen Lösungen, die zu einer Zeit $t = t^* > 0$ die positive x-Halbachse durchschneiden — für $0 < t < t^*$ soll $y(t) < 0$ und $x(t) > 0$ sein — bezeichnen wir als syzigienhaft. Von einer syzigienhaften Lösung mit $x(t - t^*) = x(t^* - t)$ und $y(t^*) \neq 0$ sagen wir endlich, daß sie eine Variationskurve ist. Dabei sind die Symmetriebedingungen etwa für hinreichend kleine positive Werte von t bzw. $t - t^*$ gemeint. Aus der Gestalt der Differentialgleichungen folgt unmittelbar, daß die Variationskurven — falls sie existieren; man beachte, daß sie überbestimmt sind — geschlossen und in bezug auf die beiden Koordinatenachsen, welche sie nur rechtwinklig treffen können, symmetrisch sind; umgekehrt, die sich schließenden Lösungen mit durchweg orthogonalen Achsenübergängen stellen Variationskurven dar, wenn nötigenfalls t mit $-t$ vertauscht wird. Die Benennung Variationskurve rechtfertigt sich bekanntlich durch die Vergleichung z. B. mit der Delaunayschen Mondtheorie; da wir jedoch die mondtheoretische Deutung der Integrationskonstanten nicht als bekannt voraussetzen wollen, so war, um eine feste Sprachweise zu gewinnen, die Einführung der obigen Terminologie unumgänglich. Die zu $t = 0$ gehörigen Werte sollen mit einem unten, die zu $t = 2t^*$ gehörigen, mit einem oben geschriebenen Zeiger Null bezeichnet werden. — Die Überbestimmtheit der Variationskurven kann folgendermaßen eingesehen werden. Man hat $x_0 = \dot{y}_0 = 0$ und $\dot{x}_0, y_0$ sind die beiden übrigen Anfangswerte. Die übrigen Koeffizienten in den beiden, für hinreichende kleine Werte von $|t|$ konvergenten Maclaurinreihen $x(t)$, $y(t)$ können durch $\dot{x}_0$ und $\frac{1}{y_0}$ mit Rücksicht auf die Bewegungsgleichungen ganz und rational ausgedrückt werden[10]). Nun sind $x(t)$ und $y(t)$ für $0 \leqq t \leqq 2t^*$ aus Symmetriegründen holomorph, da die Lösung eine Variationskurve sein soll. Indem man die Maclaurinreihen längs $0 \leqq t \leqq 2t^*$ nötigenfalls analytisch fortsetzt, erhält man so nach endlich vielen Schritten $\dot{x}^0$ und y^0 als eine Funktion von $\dot{x}_0$ bzw. $\frac{1}{y_0}$ in welche freilich auch t^* eingeht: $\dot{x}^0 = R_1(\dot{x}_0; t^*)$, $y^0 = R_2\left(\frac{1}{y_0}; t^*\right)$. Nun muß aus den Symmetriegründen $\dot{x}^0 = -\dot{x}_0$, $y^0 = -y_0$ sein. Da dies nicht von selbst (d. h. identisch) erfüllt sein kann, so hat man also zwei Bedingungen, etwa $\Psi(\dot{x}_0, y_0) = 0$, $\Phi(y^0, t^*) = 0$, die notwendig, jedoch eventuell nicht hinreichend sind für eine Variationskurve. Ist $y_0 < 0$

[10]) Berechnete Rekursionsformeln findet man bei Hill, loc. cit. [2]) S. 331.

und derart, daß die Gleichung $\Psi(X; y_0) = 0$ mindestens eine positive Wurzel $X = X(y_0)$ hat, so wollen wir vorübergehend sagen, daß die zu den Anfangsbedingungen $x_0 = \dot{y}_0 = 0$, y_0, $\dot{x}_0 = X(y_0)$ gehörige Partikularlösung pseudovariational ist.

§ 2.

Die numerischen Ergebnisse.

Aus den Hillschen numerischen Ergebnissen[11]) entnehmen wir zunächst folgendes: es gibt eine sich zu $-0{,}78190\ldots$ berechnende Zahl Δ derart, daß die Gleichung $\Psi(X; y_0) = 0$ in X für $0 > y_0 > \Delta$ genau eine positive Wurzel hat; sie hängt von y_0 monoton ab und geht mit der Differenz $y_0 - \Delta\,(> 0)$ nach Null, so daß $\Psi(0, \Delta) = 0$ ist [mit Rücksicht auf die Stetigkeit der Wurzelverschiebung hat übrigens $\Psi(X, \Delta) = 0$ überhaupt keine positive Wurzel, so daß weiter unten die Kurve of maximum lunation nicht pseudovariational, um so weniger eine Variationskurve sein wird].

Hill beweist ferner numerisch teils durch Potenzentwicklungen, teils durch mechanische Quadraturen, aber immer mit einer unzweifelhaften Gewißheit, daß von jeder, zu einem y_0 (mit $0 > y_0 > \Delta$) gehörigen pseudovariationalen Partikularlösung die positive x-Halbachse zu einer Zeit $t = t^* = t^*(y_0) > 0$ derart erreicht wird, daß $x(t) > 0$, $y(t) < 0$ ist für $0 < t < t^*(y_0)$; d. h. jede zu einem y_0 (mit $0 > y_0 > \Delta$) gehörige pseudovariationale Kurve ist syzigienhaft. Daß wir dies von Hill übernehmen dürfen, beruht darauf, daß er die Beschränktheit von $t^*(y_0)$ bei $y_0 \to \Delta$ zeigt: er setzt

$$m = \frac{4\,t^*(y_0)}{2\,\pi} \tag{1a}$$

und findet[11]), daß m mit $-y_0\,(> 0)$ auf der Strecke $0 > y_0 > \Delta$ monoton wächst und daß $\frac{4\,t^*(\Delta)}{2\pi} = \frac{1}{1{\cdot}78265\ldots}$ ist.

Letztere absolute Konstante soll mit M bezeichnet werden. Der Monotonie zufolge dürfen wir statt y_0 auch m als den Parameter der pseudovariationalen Schar betrachten; man hat dabei $0 < m < M$. Wir schreiben $x = x^{[m]}(t)$ usw., um die Abhängigkeit von m zu bezeichnen. Wegen $t^*(y_0) < t^*(\Delta) = \text{konst.}$ haben wir ferner das Recht, aus den numerischen Ergebnissen zu übernehmen, daß die Kurven $x = x^{[m]}(t)$, $y = y^{[m]}(t)$ für $0 < t < t^*(y_0) < \frac{M\pi}{2}$ ganz im Endlichen liegen, d. h. daß es eine absolute Konstante Γ gibt mit

$$(x^{[m]}(t))^2 + (y^{[m]}(t))^2 < \Gamma \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq t^{*[m]} < \frac{M\pi}{2},\ 0 < m < M. \tag{2}$$

[11]) loc. cit. [2]), zweite Tabelle auf S. 333; vgl. die graphische Darstellung auf S. 335.

Wir dürfen endlich aus demselben Grunde als durch die Hillschen numerischen Rechnungen gesichert betrachten, daß die Kurve $x = x^{[m]}(t)$, $y = y^{[m]}(t)$ für $0 \leqq t \leqq t^{*[m]}$ dem Punkte $x = y = 0$ nur bei $m \to +0$ beliebig nahe kommen kann, d. h. daß es zu jedem $\eta > 0$ ein $L = L(\eta)$ gibt, derart, daß

$$0 < L(\eta) < (x^{[m]}(t))^2 + (y^{[m]}(t))^2 \quad \text{gilt für} \quad 0 \leqq t \leqq t^{*[m]} < \frac{M\pi}{2}, \tag{3}$$
$$0 < \eta \leqq m < M.$$

Sonst soll nichts vorausgesetzt werden.

§ 3.

Vorbereitung zur Heranziehung des Weierstraß-Painlevéschen Satzes.

Um später den Gedankengang nicht zu unterbrechen, wollen wir aus dem Obigen gleich hier eine Folgerung ziehen. Da $\dot{x}_0^{[m]}$, wie erwähnt, mit $\frac{1}{m}$ monoton abnimmt und > 0 ist, so folgt aus $0 < \sqrt{L(\eta)} < r_0^{[m]}$ und $\dot{y}_0^{[m]} \equiv x_0^{[m]} \equiv 0$, daß die Jacobische Konstante $C = C^{[m]}$ für $\eta < m < M$ dem Betrage nach unterhalb einer bloß von $\eta > 0$ abhängigen Schranke liegt. Das Jacobische Integral ergibt daraus weiter wegen (2), (3), daß das Geschwindigkeitsquadrat $(\dot{x}^{[m]}(t))^2 + (\dot{y}^{[m]}(t))^2$ für $0 \leqq t \leqq t^{*[m]}$, $\eta \leqq m < M$ unterhalb einer bloß von η abhängigen Schranke gelegen ist. Man setze $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi = \varphi(t) = \varphi^{[m]}(t)$. Wegen $x^{[m]}(t) < 0$, $y^{[m]}(t) < 0$ für $0 < t < t^{*[m]}$ gilt (mod 2π)

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < t^{*[m]};$$

setzt man daher

$$\tau = \tau^{[m]}(t) = \frac{t - t^{*[m]}}{4t^{*[m]}}; \quad t^{*[m]} = t^*(y_0), \tag{1b}$$
$$2\pi$$

so ist $\tau^{[m]}(0) = -\frac{\pi}{2}$, $\tau^{[m]}(t^{*[m]}) = 0$,

$$-\frac{\pi}{2} < \tau < 0 \quad \text{für} \quad 0 < t < t^{*[m]}$$

und

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0 \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < \tau < 0,$$

also $|\varphi - \tau| < \frac{\pi}{2}$ (mod 2π), d. h.

$$r\cos(\varphi - \tau) > 0 \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < \tau < 0,$$

folglich $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r\cos(\varphi - \tau)\,d\tau > 0$. Wäre nun dieses von m abhängige positive

Integral, das wir durch $\frac{\pi}{2} a_0(m)$ bezeichnen werden, für $0 < \eta < m < M$ nicht oberhalb einer positiven Schranke $Z = Z(\eta)$ gelegen, so könnte, wie leicht ersichtlich, wegen (4) die Geschwindigkeit im Gebiete $0 < t < t^{*[m]} \left(< \frac{M\pi}{2} \right)$, $\eta \leqq m < M$ nicht beschränkt sein. — Folglich gibt es zu jedem $\eta > 0$ ein $Z = Z(\eta)$ derart, daß

$$a_0(m) > Z(\eta) > 0 \quad \text{ist für} \quad \eta \leqq m < M. \tag{5}$$

§ 3.

Die Problemstellung.

Die oben zugelassenen numerischen Ergebnisse sind sozusagen von qualitativer Natur, so daß sie aus den sehr genauen Hillschen Rechnungen für präzisionsmathematische Zwecke ohne Zweifel übernommen werden können. — Hill zeigt mit *ebenso* großer Genauigkeit, daß die pseudovariationalen Kurven sich schließen, indem sie die positive x-Halbachse unter rechtem Winkel treffen (also Variationskurven sind), und *dennoch* ist dies aus dem Gesichtspunkte der Präzisionsmathematik schon nichtssagend, da es sich dabei schon nicht um eine qualitative Behauptung handelt: jede noch so kleine — also numerisch nicht prüfbare — Abweichung von $\frac{\pi}{2}$ könnte alles verderben. Aus diesem Gesichtspunkt können wir sagen, daß wir die Bewegung für ein endliches Zeitintervall als qualitativ bekannt voraussetzen und auf Grund davon auf ihr Verhalten auf der unendlichen Zeitachse schließen, nämlich ihre Periodizität beweisen wollen, wobei $0 > y_0 > \Delta$, d. h. $0 < m < M$ ist.

Hill berechnet auch die abschließende Partikularlösung mit den Anfangswerten $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = x_0 = 0$, $y_0 = \Delta$, die, wie erwähnt, schon keine Variationskurve sein kann; er findet, daß sich praktisch auch diese schließt; in graphischer Darstellung sollte sie in den beiden Punkten $x = 0$, $y = \pm \Delta$ einen (nach außen gerichteten) Rückkehrpunkt und die y-Achse zur Doppeltangente haben[11]), [12]). — Ohne etwas neues vorauszusetzen, werden wir auch die Existenz dieser periodischen Lösung beweisen und den Punkt $y_0 = \Delta$, d. h. $m = M$ sogar übertreten können. — Hill bezeichnet die abschließende Kurve als die Mondbahn of maximum lunation; denn erstens versteht man unter Lunation die mit $-y_0$ wachsende „Periode“ $4t^{*[m]}$; zweitens versteht er unter einer Mondbahn nur solche periodische Lösungen,

[12]) Die schematische Figur bei Poincaré[4]) ist irreführend, da nach Hill[11]) (in jedem Quadranten) Punkte mit Inflexionstangenten vorhanden sein müßten; ich erwähne dies nur darum, weil sie für die Existenz der Poincaréschen Schlingbahnen notwendig zu sein scheinen. Übrigens spricht auch Poincaré von *Rückkehr*punkten.

die sämtliche Mondphasen mitmachen, d. h. alle vier Halbachsen passieren; drittens war er im Glauben, daß, wenn man die periodische Schar für $-y_0 > -A$, d. h. für $m > M$ analytisch fortsetzen würde, sich nur solche Kurven ergeben könnten, welche ganz in einer der beiden Halbebenen $x > 0$, $x < 0$ verlaufen. Poincaré[4]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß diese Vermutung gewiß unrichtig, also die Benennung nicht berechtigt ist[13]). Poincaré beweist nämlich — allerdings nur unter der Voraussetzung, daß die Kurven mit $0 < m < M$ Variationskurven sind und daß auch die Kurve of maximum lunation sich schließt — die folgende Alternative: entweder kann man die periodische Schar für $m > M$ reell überhaupt nicht fortsetzen, oder man wird zu solchen Kurven geführt, von welchen auch die y-Achse nicht nur geschnitten, also zweimal geschnitten, sondern sogar auch sechsmal geschnitten wird (mehrfache Punkte mehrfach gezählt), indem dann sich um die beiden Rückkehrpunkte der Kurve of maximum lunation Schlingen bilden müssen. Poincaré vermutet ferner, daß die reelle Fortsetzung möglich ist, d. h. daß die Schlingbahnen existieren. Um dies mit seiner μ-Methode zu beweisen, müßte er entweder zeigen, daß ein gewisser Ausdruck, der nicht explizit gegeben ist und wirklich sehr schwerlich herstellbar wäre, nicht verschwindet; oder falls der Ausdruck verschwinden würde, die Antwort auf die Existenzfrage außerdem noch von einer Realitätsdiskussion abhängig machen. Um dies zu umgehen, begnügt sich Poincaré mit der Bemerkung, daß mit Rücksicht auf das Gelingen der Hillschen numerischen Berechnung der Kurve of maximum lunation das Verschwinden jenes Ausdruckes als höchst unwahrscheinlich zu betrachten ist. — Ich werde, wie erwähnt, die Existenzfrage der Schlingbahnen [d. h. die reelle Fortsetzbarkeit für $m > M$] auf Grund von (2), (3), (5) beweisen; es bleibt dahingestellt, ob jener Ausdruck verschwindet oder nicht.

§ 4.

Der Hillsche Ansatz.

Es sei $0 < m < M$. Da $4t^{*[m]}$ die Periode sein soll, so ist wegen (1a) der Ansatz

$$x(t - t^{*[m]}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(A_i \cos i \frac{t - t^{*[m]}}{m} + C_i \sin i \frac{t - t^{*[m]}}{m} \right),$$

$$y(t - t^{*[m]}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(D_i \cos i \frac{t - t^{*[m]}}{m} + B_i \sin i \frac{t - t^{*[m]}}{m} \right)$$

[13]) Dieselbe Bemerkung hat bereits J. C. Adams gemacht.

zu versuchen, der, da die Lösung eine Variationslösung, also

$$x(t - t^{*[m]}) = x(t^{*[m]} - t); \quad y(t - t^{*[m]}) = -y(t^{*[m]} - t);$$
$$x(t) = -x(-t); \quad y(t) = y(-t),$$

d. h. [wegen (1a)]

$$C_i = 0; \quad D_i = 0; \quad A_{2i} = 0; \quad B_{2i} = 0$$

sein soll, sich wegen (1b) auf

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i+1} \cos(2i+1)\tau, \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} B_{2i+1} \sin(2i+1)\tau,$$

reduziert, wofür Hill mit

$$A_{2i+1} = a_i + a_{-i-1}, \quad B_{2i+1} = a_i - a_{-i-1}$$

auch

$$(6) \quad x = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \cos(2i+1)\tau, \quad y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \sin(2i+1)\tau; \quad a_i = a_i(m)$$

schreiben kann, wobei $a_0 = a_0(m)$ dieselbe Funktion wie in (5) bedeutet (*wenn* der Ansatz zum Ziele führt); denn mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ergibt eine leichte Umformung

$$r\cos(\varphi - \tau) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \cos 2i\tau; \quad r\sin(\varphi - \tau) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \sin 2i\tau,$$

woraus wegen $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 2i\tau\, d\tau = 0$, $i \neq 0$ die Behauptung $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r\cos(\varphi - \tau)\, d\tau = a_0 \frac{\pi}{2}$ folgt. — Bei kleinen Werten von m operiert Hill[14]) mit dem Fourierschen Ansatz[15]), den er mit einer Kühnheit, die in jenen Zeiten (1877—1878) noch frappierender als heute wirken mußte, in die Bewegungsgleichungen einsetzt, vergleicht dann darin die Koeffizienten und erhält so ein unendliches, nicht lineares und nicht rekursives Bedingungsgleichungssystem, aus welchem er die $a_i(m)$ nach Potenzen von m [vgl. (1a)] entwickeln will, nachdem er die (für die Behandlung nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten unzugängliche) reziproke Entfernung mit Hilfe des Jacobischen Integrals eliminiert und aus den Bedingungsgleichungen mit einem Scharfblick, dessen Tragweite wir bald zu bewundern haben werden, die Kombinationen

[14]) loc. cit. [2]), S. 308—310, S. 320.

[15]) Bei größeren mit Maclaurinreihen in t und mit mechanischen Quadraturen (speziellen Störungen).

$$(7)\qquad \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\{[j,i]a_ia_{i-j}+[j]a_ia_{-i+j-1}+(j)a_ia_{-i-j-1}\}=0,$$
$$(j=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \text{also}\ \neq 0)$$

[vgl. (11)] gebildet hat; die noch fehlende Gleichung, welche zu $j=0$ gehört, enthält die Jacobische Konstante:

$$(8)\qquad \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left\{(2i+1)^2+4(2i+1)m+\tfrac{9}{2}m^2(a_i^2+a_ia_{-i-1})\right\}=C.$$

Hierbei ist C durch eine Relation mit a_0 verknüpft, so daß wegen $C=C(a_0)$ der Weg prinzipiell der folgende ist: Man bestimmt die a_j mit $j\neq 0$ aus (7) als Funktionen von m und a_0, setzt dann dies in (8) ein und erhält so eine „Verzweigungsgleichung", durch welche a_0, also auch die übrigen a_j als Funktionen von m bestimmt sein sollen. Es ist nun ein springender Punkt, daß die dabei notwendige Realitätsdiskussion, die bekanntlich das Schmerzenskind jeder analytischen Theorie der periodischen Lösungen ist[16]), sozusagen völlig fortfällt. Hill gewinnt bis auf Glieder höherer Ordnung durch formale Rechnung

$$(9)\qquad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{2}{3}}a_0=1-\frac{m^2}{6}+\frac{m^3}{3}+\frac{407m^4}{2304}-\frac{67m^5}{288}-\frac{45293m^6}{41472}-\cdots.$$

Aus meiner zitierten Note[1]) folgt unmittelbar, daß a_0 als Funktion von m tatsächlich bestimmt werden kann auf dem von Hill gegangenen Wege und daß die Reihe (9) einen von Null verschiedenen Konvergenzradius hat, daß also a_0 bei hinreichend kleinen Werten von $m(>0)$ positiv ausfällt; man beachte, daß (5) nur dann herangezogen werden dürfte, wenn die Existenz der Lösung schon bekannt wäre; wir werden dennoch aus (5) schließen können, daß $a_0(m)$ für $0<m\leqq M$, ja sogar auch für hinreichend kleine $m>M$ positiv ausfällt, indem sich die Eigenschaft $a_0(m)>0$ von $m=0$ an automatisch fortpflanzt. Wir werden dabei nur folgendes heranzuziehen brauchen: *wenn* der Ansatz überhaupt zum Ziele führt, so hat man[17])

[16]) Gemeint sind: die Poincarésche μ-Methode, die sich sukzessiver Approximationen bedienende Methode der Integro-Differentialgleichungen mit einer Greenschen Funktion (vgl. die Untersuchungen von Herrn Lichtenstein über die Gestalt der Himmelskörper, insbesondere über die Maxwellsche Theorie der Saturnringe und eine in dieser Zeitschrift nächstens erscheinende Arbeit von Herrn E. Hölder), endlich die von mir im Anschluß an einen Gedanken von H. v. Koch entwickelte Methode der unendlich vielen Veränderlichen (Math. Ann. 96 (1926), S. 294–312). — Man beachte außerdem, daß es sich bei Hill nicht einmal um die Anschmiegung von periodischen Lösungen an eine Ausgangslösung, sondern selbst um die Ausgangslösung handelt. Man kann nach Herrn E. Hölder die Existenz von Variationskurven dennoch auch auf Grund der zweitgenannten Methode erbringen.

[17]) Siehe Hill, loc. cit. [2]), S. 319—320.

$$(10) \qquad (r^2)_{\tau=0} = \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i\right)^2 = \frac{1}{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} [(2i+1+m)^2 + 2m^2]\, a_i}\,.$$

Auf Grund von (5), (10) werden wir uns die Realitätsdiskussion ersparen können (obwohl diese Relationen mit Rücksicht auf ihre kursiv gesetzte Prämisse für unsere Zwecke wertlos zu sein scheinen.)

§ 5.

Die Bedingungsgleichungen.

Aber ein noch wesentlicherer springender Punkt ist der folgende: Die Gleichungen (7), worin nur die Verhältnisse $\frac{a_j}{a_0}$ eingehen und die rationalen Funktionen

$$(11) \qquad \begin{cases} [j,i] = -\frac{i}{j}\,\frac{4(j-1)i+4j^2+4j-2-4(i-j+1)m+m^2}{2(4j^2-1)-4m+m^2}, \\ [j] = -\frac{3m^2}{16j^2}\,\frac{4j^2-8j-2-4(j+2)m-9m^2}{2(4j^2-1)-4m+m^2}, \\ (j) = -\frac{3m^2}{16j^2}\,\frac{20j^2-16j+2-4(5j-2)m+9m^2}{2(4j^2-1)-4m+m^2} \end{cases}$$

von m einzutragen sind, sind derart gewählt, daß es in jeder Gleichung ein Glied gibt, dessen formale Größenordnung in m kleiner ist als die der übrigen Glieder der Gleichung; nur darum kann Hill bei dem hoffnungslos aussehenden unendlichen impliziten System Rechnungen mit 15 Dezimalen vornehmen (und ich meine Existenzsätze heranziehen). — Wegen $[j,j] = -1$; $[j,0] = 0$ hat man nämlich $(j \neq 0)$

$$(7)' \quad a_0 a_j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' [j,i]\, a_i a_{i-j} + [j] \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i+j-1} + (j) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i a_{-i-j-1},$$

wobei der Apostroph neben der ersten Summe sich auf die beiden ausgelassenen Summationszeiger $i = 0$, $i = j$ bezieht. Das System (7)′ habe ich loc. cit. — mit mehreren Druck- bzw. Schreibfehlern — in der Gestalt

$$(12) \qquad b_j = m f_j(m;\ b_1,\ b_{-1},\ b_2,\ b_{-2}, \ldots) \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

geschrieben, wobei

$$(13) \qquad \frac{a_j}{a_0} = m \frac{b_j}{j^4} \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

gesetzt ist und $(j \neq 0)$

$$f_j = \frac{F_j}{\varphi_j}; \quad \varphi_j = \varphi_j(m) = 1 + \frac{\psi(m)}{8j^2-2}; \quad \psi(m) = m^2 - 4m;$$

$$F_j = g_{1j} + g_{2j} + m g_{3j} + m g_{4j} + m^2 g_{5j} + g_{6j} + g_{7j} + m g_{8j} + m g_{9j} + m^2 g_{10j} + m^2 g_{11j},$$

$$g_{\nu j} = g_{\nu j}(m;\ b_1,\ b_{-1},\ b_2,\ b_{-2}, \ldots), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 11),$$

$$g_{1j} = -\frac{2(j-1)j}{4j^2-1}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2}\frac{j^2}{i^2(i-j)^2}\,b_i b_{i-j},$$

$$g_{2j} = -\frac{2j^2+2j-1}{4j^2-1}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' i\,\frac{1}{i-j}\frac{j^3}{i^3(i-j)^3}\,b_i b_{i-j},$$

$$g_{3j} = \frac{2j}{4j^2-1}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(i-j)^2}\,i^2\frac{j^2}{(i-j)^2}\,b_i b_{i-j},$$

$$g_{4j} = -\frac{2(j-1)}{4j^2-1}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{i-j}\frac{j^3}{i^3(i-j)^3}\,b_i b_{i-j},$$

$$g_{5j} = \frac{1}{2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{i-j}\frac{j^3}{i^3(i-j)^3}\,b_i b_{i-j},$$

$$g_{6j} = -\frac{3}{16}\frac{2j^2-4j-1}{j^2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4\,\frac{a_i a_{-i+j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{7j} = -\frac{3}{16}\frac{10j^2-8j+1}{j^2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4\,\frac{a_i a_{-i-j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{8j} = \frac{3}{8}\frac{j+2}{j^2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4\,\frac{a_i a_{-i+j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{9j} = \frac{3}{8}\frac{5j-2}{j^2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4\,\frac{a_i a_{-i-j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{10j} = \frac{27}{32}\frac{1}{j^2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4\,\frac{a_i a_{-i+j-1}}{a_0 a_0},$$

$$g_{11j} = -\frac{27}{32}\frac{1}{j^2(4j^2-1)}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} j^4\,\frac{a_i a_{-i-j-1}}{a_0 a_0}.$$

§ 6.

Abschätzungen für die Bedingungsgleichungen.

Ist $f(z_1, z_2, \ldots)$ eine Potenzreihe (von endlich oder unendlich vielen Veränderlichen), so bezeichne $\bar{f}(z_1, z_2, \ldots)$ die beste Majorantenpotenzreihe von f, welche aus f dadurch hervorgeht, daß man in f die Glieder, die zusammengezogen werden können, zusammenzieht und sodann die Koeffizienten durch ihre Beträge ersetzt. Wegen

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{i^2(i-j)^2} = O\left(\frac{1}{j^2}\right)$$

ist

$$\bar{g}_{1j}(1;1,1,\ldots) \leqq \frac{2j^2}{4j^2-1} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(i-j)^2} \frac{j^2}{i^2(i-j)^2} < \sum_{i=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{j^2}{i^2(i-j)^2} < \text{konst.},$$

und ebenso sind auch die zehn übrigen Zahlenfolgen $\{\bar{g}_{\nu j}(1;1,1,\ldots)\}$ beschränkt, d. h. es gibt eine absolute Konstante Ω mit $\bar{g}_{\nu j}(1;1,1,\ldots) < \Omega$. Da $g_{\nu j}$ nur Glieder enthält, welche sowohl in m als auch in den b_j vom Grade $\leqq 2$ sind, so gilt aus Homogenitätsgründen

$$\bar{g}_{\nu j}(A;B,B,\ldots) < (1+A+A^2)(1+B+B^2)\Omega; \quad A>0,\ B>0,$$

so daß die Zusammenzählung der $4+4+3$ Summanden des Polynoms F_j die für jedes $j \gtrless 0$, $A>0$, $B>0$ gültige Abschätzung

$$(14)\quad \bar{F}_j(A;B,B,\ldots) < \Lambda \equiv \Lambda(A,B) \equiv (4+4A+3A^2)(1+A+A^2)(1+B+B^2)\Omega$$

ergibt. — Um (12) einem Existenzsatze unterwerfen zu können, hat man die $|f_j| = \left|\frac{F_j}{\varphi_j}\right|$ von oben, also die $|\varphi_j|$ von unten abzuschätzen. Letzteres habe ich loc. cit. in einem Kreise $|m| \leqq A (>0)$ getan, jetzt will ich es darüber hinaus in einem Halbstreifen

$$(15)\qquad \left|\Re(m\sqrt{-1})\right| \leqq A, \quad \Re(m) \geqq -A < 0$$

tun, da ich auf Grund von (12) die b_j entlang der Halbachse $m>0$ analytisch fortsetzen will.

Nun gilt bei hinreichend kleinem $A>0$ für jedes j die Abschätzung

$$(16)\qquad |\varphi_j(m)| > \frac{1}{12} \text{ auf (15).}$$

Die Parabel $\psi = \psi(m) = m^2 - 4m$ ist nämlich derart, daß $\psi(0) = \psi(4) = 0$, $\psi(2) = -2$, $\psi(-1) = \psi(5) = 5$, also $|\psi(m)| \leqq 5$ ist für $-1 \leqq m \leqq 5$, so daß es eine positive Zahl A gibt derart, daß $|\psi(m)| < \frac{11}{2}$ ausfällt auf dem Rechteck $-A \leqq \Re(m) \leqq 5$, $\left|\Re(m\sqrt{-1})\right| \leqq A$, auf welchem also wegen $\varphi_j = 1 + \frac{\psi}{8j^2-2}$ und $8j^2-2 \geqq 6$ die Abschätzung

$$|\varphi_j| = \left|1 - \frac{-\psi}{8j^2-2}\right| \geqq 1 - \left|\frac{\psi(m)}{8j^2-2}\right| > 1 - \frac{\frac{11}{2}}{6} = \frac{1}{12}$$

besteht. Ferner ist $\psi(m) > 5$ für $m>5$, d. h. $\psi(\Re(m)) > 5$ für $\Re(m) > 5$: ist also $\Re(m) > 5$ und dabei $\left|\Re(m\sqrt{-1})\right| \leqq A \leqq 1$, so gilt

$$\Re(\psi(m)) = \Re(m^2) - 4\Re(m) = -\left[\Re(m\sqrt{-1})\right]^2 + [\Re(m)]^2 - 4\Re(m)$$
$$\geqq -1 + \psi(\Re(m)) > -1 + 5 > 0,$$

also wegen $8j^2-2>0$ auch

$$|\varphi_j(m)| \geqq \Re(\varphi_j(m)) = 1 + \frac{\Re(\psi(m))}{8j^2-2} > 1 > \frac{1}{12},$$

womit (16) bewiesen ist. Übrigens könnten wir schon mit dem Rechteck bequem auskommen [ja sogar auch mit dem Kreise $|m|<1$ meiner Note [1])], nach Hill[11]) ist ja $M = \frac{1}{1\cdot 78265\ldots} < 1 < 5$. Es sei in diesem Zusammenhang betont, daß der Konvergenzradius der $a_j(m)$ möglicherweise $> \frac{1}{M}$ und daß das analytische Fortsetzen der Maclaurinreihen vielleicht überflüssig, und daß der Existenzbeweis der Schlingbahnen implizite schon in meiner Note [1]) enthalten ist, doch wäre es langwierig, dies zu entscheiden.

§ 7.

Umformung der Bedingungsgleichungen zwecks analytischer Fortsetzung.

Es sei $\hat{m} \geqq 0$ zwischen 0 und M beliebig festgehalten. Bei jedem $\hat{m}$ wollen wir nur solche m in Betracht ziehen, die auf dem Kreise $|m-\hat{m}| \leqq A^0$ liegen, wobei A^0 so klein sein soll, daß (16) auch mit $A = 2A^0$ besteht. Setzt man dann

$$\frac{1}{\varphi_j(m)} = \frac{1}{\varphi_j(\hat{m}+m-\hat{m})} = h_{j,\hat{}}(m-\hat{m}) - \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)}\cdot(m-\hat{m})^n;\quad c_n^{(j)} = c_n^{(j)}(\hat{m}),$$

so ist $h_{j,\hat{}}(\mu)$ für $|\mu| \leqq 2A^0$ regulär und dem Betrage nach < 12, also gilt nach Cauchy $|c_n^{(j)}| < \frac{12}{(2A^0)^n}$, mithin

$$(16)' \qquad \bar{h}_{j,\hat{}}(A^0) \sum_{n=0}^{\infty} |c_n^{(j)}|(A^0)^n < 12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 24; \qquad 0 \leqq \hat{m} \leqq M.$$

Wir sagen, daß ein Polynom $F(z_1, z_2, \ldots)$ von unendlich vielen Veränderlichen normal ist, falls $\bar{F}(1,1,\ldots) < +\infty$ ausfällt; offenbar gilt dann auch bei jedem positiven Argument $\bar{F}(N, N, \ldots) < +\infty$. Ist die Zahlenfolge $z_1^0, z_2^0, \ldots$ beschränkt, F ein normales Polynom und ordnet man F in der Umgebung der Stelle $\{z_i^0\}$ formal um, so erhält man ein eindeutig bestimmtes und normales Polynom der Differenzen $z_i - z_i^0$. — Nun sind die Polynome $F_j(m; b_1, b_{-1}, b_2, b_{-2}, \ldots)$ wegen (14) normal. Es sei $B>0$ und $\hat{b}_1, \hat{b}_{-1}, \ldots$ eine Zahlenfolge mit $|\hat{b}_i| \leqq B$. Dann können wir also durch

$$F_{j\hat{}}(m-\hat{m};\ b_1-\hat{b}_1,\ b_{-1}-\hat{b}_{-1}, \ldots) = F_j(m;\ b_1, b_{-1}, \ldots)$$

die linkerhand stehenden Polynome der Differenzen $m-\hat{m};\ b_i - \hat{b}_i$ eindeutig erklären. Es sei $|b_i| \leqq B$ bei jedem i; wegen

$$F_j(m; b_1, b_{-1}, \ldots) = F_j(m - \hat{m} + \hat{m},\ b_1 - \hat{b}_1 + \hat{b}_1,\ b_{-1} - \hat{b}_{-1} + \hat{b}_{-1}; \ldots),$$
$$|m - \hat{m}| + |\hat{m}| \leqq A^0 + M; \quad |b_i - \hat{b}_i| + |\hat{b}_i| \leqq 3B$$

gilt leicht ersichtlich

$$\bar{F}_{j^\wedge}(|m - \hat{m}|;\ |b_1 - \hat{b}_1|,\ |b_{-1} - \hat{b}_{-1}|, \ldots) \leqq \bar{F}_j(A^0 + M;\ 3B,\ 3B, \ldots),$$

also wegen (14) und weil dabei bloß $|m - \hat{m}| \leqq A^0$ und $|b_i - \hat{b}_i| \leqq 2B$ zu sein braucht, auch

$$\bar{F}_{j^\wedge}(A^0;\ 2B,\ 2B, \ldots) \leqq \Lambda(A^0 + M;\ 3B).$$

Setzt man daher

$$f_{j^\wedge}(m - \hat{m};\ b_1 - \hat{b}_1, \ldots) = f_j(m - \hat{m} + \hat{m};\ b_1 - \hat{b}_1 + \hat{b}_1, \ldots),$$

d. h.

$$= f_j(m;\ b_1, \ldots) = \frac{F_j(m;\ b_1, \ldots)}{\varphi_j(m)}$$
$$= h_{j^\wedge}(m - \hat{m}) \cdot F_{j^\wedge}(m - \hat{m};\ b_1 - \hat{b}_1; \ldots),$$

so ist wegen $\bar{h}_{j^\wedge}(A^0) \leqq 24$

$$(14)' \qquad \bar{f}_{j^\wedge}(A^0;\ 2B,\ 2B, \ldots) < 24\,\Lambda(A^0 + M;\ 3B).$$

Offenbar kann (12) in der Gestalt

$$b_j - \hat{b}_j + \hat{b}_j = b_j = m f_j(m;\ b_1,\ b_{-1} \ldots)$$
$$- (m - \hat{m} + \hat{m}) f_{j^\wedge}(m - \hat{m};\ b_1 - \hat{b}_1; \ldots)$$

geschrieben werden, d. h. es gilt

$$(12)' \qquad b_j - \hat{b}_j = (m - \hat{m}) f_{j^\wedge}(m - \hat{m};\ b_1 - \hat{b}_1, \ldots)$$
$$+ e_j(\hat{m};\ \hat{b}_j;\ m - \hat{m};\ b_1 - \hat{b}_1, \ldots),$$

wobei

$$(17) \quad e_j(\hat{m};\ \hat{b}_j;\ m - \hat{m};\ b_1 - \hat{b}_1, \ldots) = -\hat{b}_j + \hat{m} f_{j^\wedge}(m - \hat{m};\ b_1 - \hat{b}_1, \ldots)$$

gesetzt ist. Wir wollen für einen Moment voraussetzen, daß

$$(18) \qquad e_j(\hat{m};\ \hat{b}_j;\ 0;\ 0, \ldots) = -\hat{b}_j + \hat{m} f_{j^\wedge}(0;\ 0, \ldots) = 0$$

gilt bei jedem j. Man hat

$$\bar{e}_j(|\hat{m}|;\ |\hat{b}_j|;\ A^0;\ 2B, \ldots) \leqq |\hat{b}_j| + |\hat{m}|\,\bar{f}_{j^\wedge}(A^0;\ 2B, \ldots)$$
$$< B + M \cdot 24\,\Lambda(A^0 + M;\ 3B),$$

und diese Schranke ist, falls A^0 und B festgehalten werden, eine absolute Konstante. Da die Potenzreihe $e_j(\hat{m};\ \hat{b}_j;\ X;\ Y_1, \ldots)$ nach Voraussetzung kein von X und den Y_i unabhängiges Glied enthält, so schließt man daraus

leicht, daß zu jeder absoluten Konstante $\varepsilon > 0$ zwei andere: $\alpha > 0$, $\beta > 0$ mit $\alpha \leqq A^0$, $\beta \leqq B$ derart bestimmt werden können, daß man hat

$$\bar{e}_j(|\hat{m}|;\ |\hat{b}_j|;\ \alpha;\ \beta,\ \beta, \ldots) < \varepsilon, \tag{19}$$
$$j = \pm 1,\ \pm 2, \ldots,\ 0 \leqq \hat{m} \leqq M;\ |\hat{b}_j| \leqq \beta.$$

Die Prämisse war (18). Um Irrtümern vorzubeugen, drücken wir dies auch folgendermaßen aus: jedem $\varepsilon > 0$ wollen wir ein $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ zuordnen; diese Zuordnung ist derart möglich, daß, wenn (18) besteht, auch (19) gilt.

§ 8.

Folgerungen aus dem Weierstraß-Painlevéschen Satz.

Bisher war $B > 0$ beliebig. Wir wollen jetzt B derart festlegen, daß wir zu jedem $\eta > 0$ ein $B = B(\eta) > 0$ zuordnen und η dann nachträglich fest wählen. — Man erinnere sich an den folgenden wohlbekannten Satz, der nach der Methode von Weierstraß[5]) bewiesen wird. Es sei $(x(t),\ y(t))$ eine Lösung der eingangs angeschriebenen Hillschen Bewegungsgleichungen derart, daß

$$0 < L < (x(t))^2 + (y(t))^2 < \Gamma < +\infty;\ -\infty < t < -\infty$$

gilt und daß die Jacobische Konstante C, also auch das Geschwindigkeitsquadrat, dem Betrage nach kleiner ist als eine hinreichend große dritte absolute Konstante J; dann gibt es ein bloß von L, Γ, J abhängiges, also von den Integrationskonstanten unabhängiges positives Zahlenpaar $\vartheta = \vartheta(L, \Gamma, J)$, $H = H(L, \Gamma, J)$ derart, daß $x(t)$ und $y(t)$ im Parallelstreifen $|\Re(t\sqrt{-1})| \leqq \vartheta$ holomorph und dem Betrage nach $< H$ sind [gemeint ist derjenige Zweig von $x(t)$ bzw. $y(t)$, welcher zur unmittelbaren analytischen Fortsetzung entlang der reellen Achse gehört]. Setzen wir nun voraus, daß der Ansatz (6) bei einem m mit $0 < \eta \leqq m < M$ zum Ziele führt; dann bestehen (2) und (3) nicht nur für die dort behauptete Viertelperiode, sondern — aus Symmetriegründen — auch für $-\infty < t < +\infty$; ferner ist dabei — wie eingangs bewiesen wurde — die (von m abhängige) Jacobische Konstante dem Betrage nach unterhalb einer ebenfalls bloß von η abhängigen Schranke gelegen. Wenn also der Ansatz bei einem m mit $0 < \eta \leqq m < M$ zum Ziele führt, so hat man ein Zahlenpaar $\vartheta = \vartheta(\eta) > 0$, $H = H(\eta) > 0$ von der Beschaffenheit [vgl. (1a), (1b)], daß die Fourierreihen (6) für $|\Re(\tau\sqrt{-1})| \leqq \vartheta(\eta)$ holomorphe Funktionen darstellen, die daselbst dem Betrage nach $< H$ sind, so daß die Laurentreihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i(m)\,\zeta^{2i+1} \qquad (\zeta = \exp \tau\sqrt{-1}) \tag{6}'$$

für $1-\frac{\vartheta(\eta)}{2} \leqq |\zeta| \leqq 1+\frac{\vartheta(\eta)}{2}$ holomorph und dem Betrage nach $< 2H(\eta)$ ist, wobei schon $1 > \frac{\vartheta(\eta)}{2} (> 0)$ angenommen sei. Man hat dann wegen

$$1-\frac{\vartheta(\eta)}{2} < \frac{1}{1+\frac{\vartheta(\eta)}{2}}$$

und nach Cauchy-Laurent:

$$|a_j(m)| < H(\eta)\left[1+\frac{\vartheta(\eta)}{2}\right]^{-|2j+1|},$$

also wegen (13) und da die Prämisse von (5) nach Voraussetzung erfüllt ist:

$$|b_j(m)| = \left|\frac{j^4 a_j(m)}{m\, a_0(m)}\right| < \frac{j^4 \cdot H(\eta)\left[1+\frac{\vartheta(\eta)}{2}\right]^{-|2j+1|}}{\eta \cdot Z(\eta)} \quad -$$

und dieser Ausdruck bleibt wegen $\frac{\vartheta(\eta)}{2} > 0$ unterhalb einer von j unabhängigen, also bloß von η abhängigen Schranke, die wir durch $B = B(\eta)$ bezeichnen wollen. — Wir können also zu jedem $\eta > 0$ ein $B = B(\eta) > 0$ derart zuordnen, daß, *wenn* der Ansatz bei einem m mit $\eta \leqq m < M$ zum Ziele führt, in (13)

$$(20) \qquad |b_j(m)| < B(\eta) \qquad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ist. Diese Zuordnung ist also von derselben Natur, wie diejenige bei (19): sie geschieht unabhängig davon, ob die Prämisse der Abschätzung erfüllt ist oder nicht. Wir können $B(\eta)$ derart wählen, daß $B(\eta) \geqq 1$ gilt.

§ 9.

Existenzsatz zum unendlichen Gleichungssystem.

Wir wollen jetzt η festlegen. Nach Voraussetzung ist $A^0 > 0$ festgehalten. Man erhält, falls in (16)′ $\hat{m} = 0$ gesetzt wird, die Abschätzung $\bar{h}_j(A^0) < 24$, woraus wegen $f_j = h_j \cdot F_j$ und (14) folgt

$$\bar{f}_j(A^0;\ 1,\ 1, \ldots) < 24\, A(A^0,\ 1).$$

Wie ich loc. cit.[1]) bewiesen habe, folgt daraus, daß (12) im Kreise

$$|m| < \eta' = \min\left(A^0,\ \frac{1}{24\, A(A^0,\ 1)}\right)$$

genau eine bei $m = 0$ holomorphe Lösung $b_j = b_j(m)$, $j = \pm 1, \ldots$ hat und daß dabei die Abschätzung $|b_j(m)| \leqq 1$ gilt. Aus der Tabelle der g_{ν_j} folgt unmittelbar, daß $b_j(m) \equiv 0$, $j = \pm 1, \ldots$ keine Lösung ist, daß also die eindeutige holomorphe Lösung nicht identisch verschwindet (wohl aber natürlich bei $m = 0$). Daraus folgt, wie erwähnt, daß es ein positives $\eta'' \leqq \eta'$ gibt, derart, daß einerseits die Hillsche Entwicklung (9) für

$|m| < \eta''$ gültig ist und daß andererseits $a_0(m) > 0$ ausfällt für $0 \leqq m < \eta''$. Wir wählen ein η_0 mit $\eta_0 < \eta''$, legen das oben mit η bezeichnete Argument von $B(\eta)$ durch $\eta = \eta_0$ fest und setzen der Kürze halber $B^0 = B(\eta_0)$ und $A^0 = 24\,A\,(A^0 + M;\ 3B^0)$, so daß nach (14)′

$$\bar{f}_{j\wedge}(A^0,\ B^0,\ B^0, \ldots) < A^0 \tag{21a}$$

ausfällt; es ist dabei nur vorausgesetzt, daß

$$0 \leqq \hat{m} < M, \qquad |\hat{b}_j| \leqq B^0, \qquad j = \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

ist, so daß (21a) erst recht besteht, falls

$$\eta_0 \leqq \hat{m} < M; \qquad |\hat{b}_j| \leqq B^0, \qquad j = \pm 1,\ \pm 2, \ldots \tag{21b}$$

erfüllt ist. Wir wählen eine positive Zahl ε^0, so daß

$$\varepsilon^0 < B^0 \tag{22}$$

und ordnen zu diesem ε^0 zwei positive Zahlen α^0, β^0 gemäß (19) zu; es folgt so aus (18) und (21b)

$$\bar{e}_j(|\hat{m}|;\ |\hat{b}_j|;\ \alpha^0;\ \beta^0,\ \beta^0, \ldots) < \varepsilon^0, \tag{23}$$

wobei (18) zunächst nur eine Hypothese ist, deren Erfülltsein vor der Heranziehung von (23) erst zu beweisen sein wird.

Man setze in (12)′ $b_j - \hat{b}_j = Y_j$, $m - \hat{m} = X$, also

$$Y_j = X f_{j\wedge}(X;\ Y_1, Y_{-1}, \ldots) + e_j(\hat{m};\ \hat{b};\ X;\ Y_1, Y_{-1}, \ldots). \tag{12}''$$
$$(j = \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

Im Anhang beweise ich das folgende, implizite schon in meinen früheren Arbeiten enthaltene und übrigens ziemlich auf der Oberfläche[18]) gelegene

Lemma. Unter den Voraussetzungen (21b), (23) gibt es eine bloß von A^0, B^0, ε^0 (und M) abhängige positive Zahl ϱ^0 von der folgenden Beschaffenheit: Ist (18) erfüllt, so hat (12)″ in der Umgebung von $X = 0$ genau eine mit X verschwindende holomorphe Lösung $Y_j = Y_j(x)$, und zwar ist sie für $|X| \leqq \varrho^0$ holomorph und derart, daß daselbst $|Y_j(x)| \leqq B^0$ ausfällt bei jedem j. — Wir haben damit alle Fäden in den Händen zum Nachweis der Möglichkeit der angekündigten analytischen Fortsetzung.

§ 10.

Die analytische Fortsetzbarkeit.

Wir haben η^0 derart gewählt, daß die $b_j(m)$ für $|m| \leqq \eta^0$ holomorph und dem Betrage nach $\leqq 1$, um so mehr $\leqq B^0$ sind und daß $a_0(m)$ für $|m| \leqq \eta_0$ holomorph und für $0 < m \leqq \eta^0$ positiv ist. Wegen (12) führt

[18]) S. nämlich meinen unmittelbar vorangehenden Aufsatz in diesem Hefte.

also der Ansatz (6) bei $0 < m \leqq \eta_0$ zum Ziele. Da die $b_j(\eta_0)$ eine Lösung von (12) für $m = \eta^0$ darstellen, so ist, falls $\hat{m} = \eta^0$, $\hat{b}_j = b_j(\eta^0)$ gesetzt wird, die Bedingung (18) erfüllt. Nach dem Lemma erhalten wir also die Abweichungen $b_j(m) - b_j(\eta^0)$ im Kreise $|m - \eta^0| \leqq \varrho^0$ als holomorphe Funktionen vom Betrage $\leqq B^0$ [die so bestimmten $b_j(m)$ sind unmittelbare analytische Fortsetzungen der für $|m| \leqq \eta_0$ bestimmten; dies folgt unmittelbar aus der vom Lemma ausgesprochenen Unität]. Folglich sind die Funktionen

$$(10)' \qquad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{a_j}{a_0} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{m\, b_j(m)}{j^4},$$

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} [(2j+1+m)^2 + 2m^2] \frac{a_j}{a_0} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} m \frac{(2j+1+m)^2 + 2m^2}{j^4} b_j(m),$$

wobei $\frac{m\, b_0(m)}{0} = 1$ gedacht ist, für $0 < m < \eta^0 + \varrho^0$ gewiß holomorph und wir können voraussetzen, daß sie auch für $m = \eta^0 + \varrho^0$ holomorph sind, da man sonst ϱ^0 ein wenig verkleinern würde. Ferner sind die Funktionen $(10)'$ für $0 < m \leqq \eta^0$, weil dabei (3), (5), (10) herangezogen werden dürfen[19]), positiv, also auch positiv für hinreichend kleine $m > \eta^0$, der Stetigkeit zufolge; $a_0(m)$ ist ja auch für $m = \eta_0$ holomorph. Mithin können wir $a_0(m)$ für hinreichend kleine Werte von $m > \eta^0$ durch[20])

$$(10)'' \qquad a_0(m) = \left[\frac{1}{\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} [(2i+1+m)^2 + 2m^2] \frac{a_i}{a_0} \right) \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{a_i}{a_0} \right)^2} \right]^{\frac{1}{3}} > 0$$

erklären, so daß der Ansatz (6) bei hinreichend kleinen Werten von $m > \eta^0$ zum Ziele führt, woraus folgt, daß dabei die hypothetischen Beziehungen herangezogen werden können; nun folgt aus Stetigkeitsgründen [vgl. (5), (10), (3)], daß es keinen Punkt $m' \leqq \eta^0 + \varrho^0$ geben kann, wo eine der beiden Funktionen $(10)'$ verschwinden würde. Folglich führt der Ansatz für $0 < m \leqq \eta_0 + \varrho_0$ zum Ziele, so daß (20) bei $m = \eta_0 + \varrho_0$ herangezogen werden darf. So können wir jetzt weiterschließen und so die Intervalle η_0, $\eta_0 + \varrho_0$, $\eta_0 + 2\varrho_0$, ... erhalten, also nach endlich vielen Schritten auch den Punkt $m = M$ *über*decken, indem wir durch eine beliebig kleine Verkleinerung von ϱ_0 dafür sorgen können, daß die Zahl $M - \eta_0$ mit ϱ_0 inkommensurabel wird; freilich können wir den Prozeß nur für $m < \eta_0 + N\varrho_0 + \varrho_0$ fortsetzen, wenn N die größte ganze Zahl mit $\eta_0 + N\varrho_0 < M$ ist.

[19]) Da (3) für eine Viertelperiode besteht, so besteht es allgemein.

[20]) Bei Hill, loc. cit. [2]), S. 320 fehlt der Exponent $\frac{1}{3}$ wegen zweier Druckfehler.

Damit ist die Existenz der Hillschen Mondbahn of maximum lunation und der Poincaréschen Schlingbahnen bewiesen. — Der Beweis wurde durch den etwas paradoxen Umstand ermöglicht, daß die für die Kurvenschar „topologisch“ und für die Anfangsdistanz y_0 „algebraisch“[21]) kritische Stelle $m = M$ für die einzelnen Fourierkoeffizienten als analytischen Funktionen von m keinerlei Sonderstellung einnimmt. Die Rolle des von Poincaré vermuteten Nichtverschwindens seiner Determinante (s. o.) übernimmt offenbar eben dieser Umstand. Schon dies allein zeigt die tiefgehende Überlegenheit des direkten Hillschen Verfahrens.

Anhang.

Beweis des Lemmas.

Das Lemma ist offenbar enthalten in

Hilfssatz I. Es sei $\{f_i(x; y_1, y_2, \ldots)\}$ eine Potenzreihenfolge, $\{e_i(x; y_1, y_2, \ldots)\}$ eine andere und es sei dabei $e_i(0; 0, 0, \ldots) = 0$, so daß $e_i(x; y_1, y_2, \ldots) = x\, e_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k\, e_{ik}$ ist, wobei die e_{jk} ebenfalls nur nichtnegative Potenzen enthalten. Es sei $A^* > 0$, $B > \varepsilon > 0$, $A > 0$,

$$(1) \qquad \bar{f}_i(A; B, B, \ldots) \leqq A^*, \qquad \bar{e}_i(A; B, B, \ldots) \leqq \varepsilon.$$

Da diese Abschätzungen bei Verkleinerung von A erst recht bestehen, so können wir voraussetzen, daß $B \geqq A$ ausfällt. Ebenso können wir voraussetzen, daß A^* so groß ist, daß die Zahl

$$2\varrho = \frac{A\left(1 - \frac{\varepsilon}{B}\right)}{A^* + \varepsilon} \quad (> 0)$$

kleiner ist als A. Dann hat das System

$$(2) \qquad y_i = x\, f_i(x; y_1, y_2, \ldots) + e_i(x; y_1, y_2, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

genau eine bei $x = 0$ holomorphe Lösung $\{y_i(x)\}$, sie ist für $|x| < \varrho$ holomorph und derart, daß daselbst $|y_i(x)| < B$ gilt.

Beweis. Aus Majorantengründen werden wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen können, daß die Koeffizienten der f_i und der e_i reell und nicht negativ sind. Es sei also $f_i \equiv \bar{f}_i$, $e_i \equiv \bar{e}_i$, ferner $\bar{e}_i = x\, \bar{e}_{i0} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k\, \bar{e}_{ik}$.

Wegen (1), (2) hat man

$$(1)' \qquad d_i(A; B, B, \ldots) \leqq A^* + \varepsilon, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} e_{ik}(A; B, B, \ldots) \leqq \frac{\varepsilon}{B},$$

[21]) Vgl. den Abschnitt über die numerischen Ergebnisse.

$$(2)' \qquad y_i = x\, d_i(x; y_1, y_2, \ldots) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k\, e_{ik}(x; y_1, y_2, \ldots),$$

wobei $d_i = f_i + e_{i0}$ gesetzt ist. Es seien die Zahlen $\xi; \eta_1, \eta_2, \ldots$ derart festgehalten, daß

$$(3) \qquad |\xi| \leqq \varrho\,(< A); \quad |\eta_1| \leqq B, \ |\eta_2| \leqq B, \ldots,$$

und man betrachte das in den y_i lineare System

$$(2a) \qquad y_i - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot e_{ik}(\xi; \eta_1, \eta_2, \ldots) = \xi\, d_i(\xi; \eta_1, \eta_2, \ldots),$$

wobei λ ein Parameter ist. Setzt man hierin den Liouville-Neumannschen Ansatz $y_i = \sum_{n=0}^{\infty} y_{kn} \lambda^n$ ein, wobei $y_{kn} = y_{kn}(\xi; \eta_1, \eta_2, \ldots)$, so ergibt sich die Rekursion

$$y_{in} = \sum_{k=1}^{\infty} y_{k\ n-1} \cdot e_{ik}(\xi; \eta_1, \eta_2, \ldots); \qquad y_{i0} = \xi\, d_i(\xi; \eta_1, \eta_2, \ldots),$$

so daß wegen $(1)'$ und (3)

$$|y_{i0}| \leqq \varrho\,(A^* + \varepsilon); \qquad |y_{i1}| \leqq \varrho\,(A^* + \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} |e_{ik}| \leqq \varrho\,(A^* + \varepsilon)\frac{\varepsilon}{B}; \ \ldots.$$

$$|y_{in}| \leqq \varrho\,(A^* + \varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{B}\right)^n,$$

also wegen $\varepsilon < B$ und nach der Definition von ϱ

$$\sum_{n=0}^{\infty} |y_{in}| \leqq \frac{\varrho\,(A^* + \varepsilon)}{1 - \frac{\varepsilon}{B}} < A \qquad \text{ist.}$$

Die Liouville-Neumannschen Reihen sind also auch für $\lambda = 1$ gültig, d. h. das in den y_i lineare System

$$(2a)' \qquad y_i = \xi\, d_i(\xi; \eta_1, \eta_2, \ldots) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k\, e_{ik}(\xi; \eta_1, \eta_2, \ldots)$$

hat in jedem Punkte der Mannigfaltigkeit (3) eine Lösung

$$(2b)' \qquad y_i = Y_i(\xi; \eta_1, \eta_2, \ldots)$$

mit $|Y_i| \leqq A$. Es ist ferner, wie man sich leicht überzeugt[22]), $(2b)'$ die einzige derartige Lösung von $(2a)'$. Folglich[23]) befriedigt jede Lösung $\{y_i(x)\}$ des Systems (2), welche von der verlangten Beschaffenheit ist, auch das System

$$y_i = Y_i(x; y_1, y_2, \ldots)\left[= \sum_{n=0}^{\infty} y_{in}(x; y_1, y_2, \ldots)\right]$$

[22]) Vgl. hierzu z. B. H. v. Koch, Jahresbericht d. deutschen Math.-Ver. 22 (1913), S. 285—291.

[23]) Wegen dieser Schlußweise s. meine unter [18]) zitierte Arbeit.

und umgekehrt. Es ist dabei $Y_i \equiv \overline{Y}_i$, es geht ferner x in Y_i auf, da es in y_{i0}, also (wegen der Rekursion) auch in jedes y_{in} aufgeht. Folglich enthält die Potenzreihe $x^{-1} Y_i(x; y_1, y_2, \ldots) = F_i(x; y_1, y_2, \ldots)$ keine negativen Potenzen. Da auf (3) $|Y_i| \leqq A$ ist, so gilt offenbar

$$F_i(\varrho; B, B, \ldots) \leqq \frac{A}{\varrho}. \tag{4}$$

Mithin ist Hilfssatz I eine Folge von

Hilfssatz II. Ist $\{F_i\}$ eine Potenzreihenfolge derart, daß $F_i \equiv \overline{F}_i$ und besteht dabei (4), worin $\varrho > 0$ und $0 < A \leqq B$ ist, so hat das System $y_i = x F_i(x; y_1, y_2, \ldots)$ genau eine bei $x = 0$ holomorphe Lösung $\{y_i(x)\}$, sie ist für $|x| < \varrho$ holomorph und derart, daß $|y_i(x)| < B$ ausfällt.

Den Beweis von Hilfssatz II findet man loc. cit.[1]).

Damit ist das Lemma bewiesen.

(Eingegangen am 1. Juli 1927.)

Zur Analysis im Hilbertschen Raume.

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Einleitung.

Es bezeichne x_i und μ_l je eine Veränderliche, $\mathfrak{K}_\delta$ die komplexe Kugel $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \delta^2$, $\mathfrak{M}_\varepsilon$ den komplexen Würfel $|\mu_l| < \varepsilon$, $l = 1, 2, \ldots, k\,(< +\infty)$, endlich $F = F(x_1, x_2, \ldots;\ \mu_1, \ldots, \mu_k)$ eine Potenzreihe von unendlich vielen Veränderlichen mit reellen Koeffizienten. Wir setzen voraus, daß die Potenzreihe

$$^{[m]}F = F(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots; \mu_1, \ldots, \mu_k)$$

von $m + k$ Veränderlichen auf $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{M}_\varepsilon$ bei jedem festen m absolut konvergiert und daß daselbst $\lim_{m=\infty} {}^{[m]}F$ vorhanden ist, und ordnen dann diesen Grenzwert nach dem Vorgang der Hilbertschen Theorie dem Symbol F zu. Es sei $|F| <$ konst. auf $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{M}_\varepsilon$. Wir nehmen an, daß der Koeffizient c_i des linearen Gliedes $c_i x_i$ von F im Mittelpunkt von $\mathfrak{M}_\varepsilon$ verschwindet $(i = 1, 2, \ldots)$. — Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so sagen wir, F sei normal. Man beachte, daß in diesen Annahmen nicht die Existenz eines positiven Zahlenpaares δ', ε' enthalten ist, so daß F auf $\mathfrak{K}_{\delta'} + \mathfrak{M}_{\varepsilon'}$ absolut oder (in einem näher zu definierenden Sinne) gleichmäßig konvergent wäre. — Wir werden sehen, daß mit F auch $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ normal ist.

Es bezeichne $\| F^0_{ik} \|$ die Matrix

$$\left\| \frac{\partial^2 F(0, 0, \ldots; 0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_i \, \partial x_k} \right\|, \quad i, k = 1, 2, \ldots,$$

die, wie wir sehen werden, zu einer im Hilbertschen Sinne beschränkten quadratischen Form gehört; umgekehrt ist die Matrix einer beliebigen beschränkten quadratischen Form die Hessesche Anfangsmatrix eines

passend zu wählenden normalen F. Wir betrachten nur den „regulären Fall", wo $\| F_{ik}^0 \|$ eine eindeutige und zugleich auch beschränkte Reziproke hat, und den „Verzweigungsfall", wo die zugehörigen homogenen Gleichungen eine von 0 und $+\infty$ verschiedene Anzahl linear unabhängiger quadratisch konvergenter Lösungen haben; d. h., wir schließen, falls $\| \delta_{ik} \|$ die Einheitsmatrix bezeichnet, die folgenden drei Fälle aus: $\lambda = 1$ ist für $\| \delta_{ik} - \lambda(\delta_{ik} - F_{ik}^0) \|$ ein Eigenwert unendlich hoher Ordnung, ein Punkt des Streckenspektrums oder des Häufungsspektrums; wir setzen also nicht voraus, daß bei jedem endlichen λ entweder der reguläre Fall oder der Verzweigungsfall vorliegt, d. h. daß $\| \delta_{ik} - F_{ik}^0 \|$ zu einer vollstetigen quadratischen Form gehört.

Im folgenden sollen Sätze von nachstehendem Typus bewiesen werden: ist F normal und liegt der reguläre Fall vor, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß das unendliche Gleichungssystem $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ auf $\mathfrak{M}_\varepsilon$ eine Lösung $x_i = x_i(\mu_1 \dots \mu_k)$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \delta^2$ besitzt, wo x_i bei reellem μ reell ist. Es handelt sich also um einen Beitrag zum Hilbertschen Programm [1]), Variationsprobleme aus dem Funktionenraum in den Hilbertschen zu verlegen und zwar auch dann, wenn die Bedingungsgleichungen weder linear noch rekursiv sind. Dementsprechend werden auch Existenzsätze bewiesen, welche es ermöglichen, mit Heranziehung des zuerst von Herrn Schmidt [2]), später vielfach von Herrn Lichtenstein [3]) verwendeten Kunstgriffes der Kernzerspaltung auch den Verzweigungsfall zu behandeln, vorausgesetzt, daß F nicht nur normal, sondern auch gleichmäßig konvergent ist (letzteres ist hinreichend dafür, daß x_i im regulären Fall von den μ holomorph abhängt. Diese holomorphe Lösung ist eindeutig bestimmt, falls F auch absolut konvergiert oder wenigstens die $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ absolut konvergieren, was per def. der Fall sein wird). — Im Verzweigungsfall braucht nicht x_i für reelle μ reell zu sein; um dies zu entscheiden, ist vielmehr die algebraische Realitätsdiskussion endlich vieler Eliminationsgleichungen zwischen endlich vielen Veränderlichen notwendig. Es bestehen nach Poincaré [4]) im endlichen Falle $\frac{\partial^{[m]} F}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ gewisse hinreichende Kriterien, welche gestatten, aus gewissen Extremums- und Vorzeicheneigenschaften von ${}^{[m]}F$ auf Grund der Kroneckerschen Indizentheorie

[1]) Rend. Palermo **27** (1909), S. 59—74.

[2]) Math. Ann. **65** (1908), S. 370—399; s. insb. S. 399.

[3]) S. z. B. Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 263—268.

[4]) Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, I—III (1892—99), I, S. 68—76, III, S. 201ff. passim; ferner Acta Math. **7** (1885), S. 261—276.

auf die Existenz mindestens eines reellen Zweiges a priori (d. h. ohne eine *algebraische* Kurvendiskussion) zu schließen. Bei gehöriger Vorsicht bezüglich des Nichtkompaktseins des Hilbertschen Raumes kann man diese Kriterien auf Grund der weiter unten abgeleiteten Abschnittssätze auf den der Indizentheorie [wegen des Fehlens eines Integralbegriffes, ja sogar schon aus topologischen Gründen] nicht unmittelbar zugänglichen Hilbertschen Raum übertragen, was insofern interessant ist, als Poincaré[5]) in seiner Verzweigungstheorie der Gleichgewichtsfiguren derartige Realitätskriterien mit $m = +\infty$ ausdrücklich ohne Beweis in Anspruch genommen hat; natürlich postuliert er nur (auch für den regulären Fall) einen Existenzsatz.

So behandelt Poincaré z. B. die Thomsonsche Ringfigur im Rahmen des Hilbertschen Programms, aber mit Linearisierung der Bedingungsgleichungen, d. h. in „erster" Näherung, wodurch die Variablen zugleich auch separiert werden. Die Existenz dieser Figur hat vor einigen Jahren Herr Lichtenstein[6]) in Erweiterung und Verallgemeinerung früherer Liapounoffscher Resultate sichergestellt. Ich kann mit Hilfe der in dieser Arbeit zu beweisenden Sätze und mit wesentlicher Heranziehung der Liapounoff-Lichtensteinschen funktionalen Potenzentwicklung gewisser Potentialausdrücke[7]) [8]) [9]) den Poincaréschen Ansatz streng durchführen und, auf Anregung von Herrn Lichtenstein über seine eigenen Ergebnisse etwas hinausgehend, die bei seiner Methode unerledigt gebliebene Frage nach der Analytizität der Meridiankurve[10]) bejahend beantworten[11]); ich hoffe darauf noch ausführlich zurückkommen zu können.

[5]) Acta Math. **7** (1885), 279—283.

[6]) Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 82—118.

[7]) Liapounoff behandelt nur die Umgebung der Ellipsoide; seine Methoden können nicht ohne weiteres auf andere Fälle übertragen werden; wohl aber die Resultate, wie dies von Herrn Lichtenstein gezeigt worden ist.

[8]) Vgl. a. a. O. [3]), S. 239—249, 279—284.

[9]) Diese Entwicklungssätze brauche ich zum Nachweis der Normalität und der gleichmäßigen Konvergenz in F.

[10]) Herr Lichtenstein zeigt, daß die Meridiankurve Ableitungen aller Ordnung hat.

[11]) Der Umstand, daß die Ausgangsfigur ein *Kreis*ring ist, wird verschiedentlich ausgenützt. Erstens folgt aus diesem Umstand, daß bei Verwendung von trigonometrischen Fourrierreihen die Matrix eine Hauptdiagonalmatrix ist. Zweitens gelingt es dadurch leicht, zu bestätigen, daß die „formale" Größenordnung der i-ten Bedingungsgleichung in einem passend zu wählenden Entwickelungsparameter mit i wächst, was für den Nachweis der Analytizität wesentlich ist. Vielleicht wird es aber dennoch möglich sein, mit dieser Methode die Analytizität auch anderer Gleichgewichtsfiguren zu beweisen.

Erstes Kapitel.

Über beschränkte Folgen und Matrizen regulärer Potenzreihen von unendlich vielen Veränderlichen.

Es bezeichne $\mathfrak{K}_\delta$ mit $\delta > 0$ die komplexe Mannigfaltigkeit $\sum_i |x_i|^2 < \delta^2$ $\left(\text{unter } \sum_i \text{ immer } \sum_{i=1}^{\infty} \text{ gemeint}\right)$ und $\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} {}_{(\nu)}\varphi$ eine formal vorgelegte Potenzreihe, wobei ${}_{(\nu)}\varphi$ homogen vom Grade ν in den x ist. Es bedeute $\bar{\varphi}$ die beste Majorante von φ, d. h. diejenige Potenzreihe, in welche φ übergeht, wenn man die Koeffizienten durch ihre Beträge unter der Voraussetzung ersetzt, daß die Glieder von φ, die zusammengezogen werden können, zusammengezogen sind; ist z. B. $\varphi \equiv {}_{(2)}\varphi = \sum_i \sum_k g_{ik} x_i x_k$, so gilt $\bar{\varphi} = \sum_i \sum_k |g_{ik}|\, x_i x_k$ im allgemeinen nur dann, wenn die Matrix symmetrisch ist; ist sie schiefsymmetrisch, so ist $\varphi \equiv \bar{\varphi} \equiv 0$. Es bezeichne endlich ${}^{[m]}\varphi$ die Potenzreihe von m Veränderlichen, in welche φ übergeht, wenn man darin $x_i \equiv 0$, $i > m$ setzt.

Wir sagen, daß φ in einem Punkte $\{x_i\}$ von $\mathfrak{K}_\delta$ absolut konvergiert, wenn daselbst $\bar{\varphi}(|x_1|, |x_2|, \ldots) < +\infty$, und weiter, daß φ in einem Punkte von $\mathfrak{K}_\delta$ konvergent ist mit der Summe $\varphi = \lim_{m=+\infty} {}^{[m]}\varphi$, falls daselbst ${}^{[m]}\varphi$ bei jedem $m (< +\infty)$ absolut konvergiert und jener Grenzwert vorhanden ist; offenbar ist die Konvergenz und die Summe von φ unabhängig von der Numerierung der x. Ist φ auf $\mathfrak{K}_\delta$ konvergent und die obere Grenze $\Omega_\delta(\varphi)$ von $|\varphi|$ auf $\mathfrak{K}_\delta$ endlich, so sagen wir, φ sei regulär in bezug auf δ (wird δ nicht erwähnt, so ist, ebenso wie bei späteren, auf ein δ bezogenen Begriffen, ein passend kleines δ gemeint). Mit φ ist auch ${}^{[m]}\varphi$ regulär in bezug auf δ, und es gilt $\Omega_\delta({}^{[m]}\varphi) \leqq \Omega_\delta(\varphi)$.

Es sei φ regulär in bezug auf δ und $\{\mathring{x}_i\}$ ein beliebiger festzuhaltender Punkt von $\mathfrak{K}_{\frac{\delta}{2}}$. Man setze $\breve{x}_i = x_i - \mathring{x}_i$, und es bezeichne $\breve{\mathfrak{K}}_{\frac{\delta}{2}}$ die folgende Mannigfaltigkeit der von den x_i und $\mathring{x}_i$ für einen Moment unabhängig gedachten $\breve{x}_i$: $\sum_i |\breve{x}_i|^2 < \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$. Es sei $\psi_m(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \ldots, \breve{x}_m)$ eine Potenzreihe, in welche ${}^{[m]}\varphi$ bei formaler Umordnung übergeht (ψ_m hängt auch von dem auf $\mathfrak{K}_{\frac{\delta}{2}}$ festgehaltenen $\{\breve{x}_i\}$ ab). Es sei $\{\breve{x}_i\}$ auf $\breve{\mathfrak{K}}_{\frac{\delta}{2}}$ gelegen. Da nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_i (|\mathring{x}_i| + |\breve{x}_i|)^2 < \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + 2\sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \delta^2,$$

so ist nicht nur $\{x_i = \mathring{x}_i + \breve{x}_i\}$, sondern auch $\{x_i = |\mathring{x}_i| + |\breve{x}_i|\}$ auf $\mathfrak{K}_\delta$ gelegen, also ${}^{[m]}\bar{\varphi}(|\mathring{x}_1| + |\breve{x}_1|, \ldots, |\mathring{x}_m| + |\breve{x}_m|) < +\infty$ und mithin ψ_m

der unbedingten Konvergenz zufolge eindeutig bestimmt, und zwar derart, daß $\overline{\psi}_m(|\check{x}_1|, \ldots, |\check{x}_m|) < +\infty$ auf $\check{\mathfrak{R}}_{\frac{\delta}{2}}$, und daselbst ${}^{[m]}\varphi = \psi_m$, wenn $x_i = \mathring{x}_i + \check{x}_i$. Da ${}^{[m]}\varphi$ offenbar in jedem Punkte von $\mathfrak{R}_\delta$ holomorph ist, so ist ψ_m ein holomorphes Funktionenelement, das aus ${}^{[m]}\varphi$ unmittelbar entsteht. — Wegen ${}^{[m]}\psi_{m+1} = \psi_m$ gibt es ein $\psi = \psi(\check{x}_1, \check{x}_2, \ldots)$ mit ${}^{[m]}\psi = \psi_m = {}^{[m]}\varphi$, und aus dem obigen folgt, daß ψ regulär ist in bezug auf $\frac{\delta}{2}$, daß $\varphi = \psi$ gilt im Sinne von $x_i = \mathring{x}_i + \check{x}_i$, falls $\{\mathring{x}_i\}$ auf $\mathring{\mathfrak{R}}_{\frac{\delta}{2}}$ und $\{\check{x}_i\}$ auf $\check{\mathfrak{R}}_{\frac{\delta}{2}}$ gelegen ist, und daß $\Omega_{\frac{\delta}{2}}(\psi) \leqq \Omega_\delta(\varphi)$. — Wir werden diesen Satz den Umgebungssatz nennen; er besagt u. a., daß keine reguläre Stelle isoliert ist im Sinne des zur Maßbestimmung $\sqrt{\sum_i (u_i - v_i)^2}$ gehörigen Umgebungsbegriffes; es folgt übrigens aus den zu ihr gehörigen bekannten Exhaustionseigenschaften[12]), daß wir oben die Zahl $\frac{\delta}{2}$ nur aus Bequemlichkeitsgründen betrachtet haben, um nicht Paare von Radien einführen zu müssen. — In Hinsicht auf das Nichtkompaktsein und auf die damit zusammenhängende freie Topologie von $\sum_i x_i^2 \leqq \delta^2$ ist aber dennoch nicht zu erwarten, daß mit der Theorie der analytischen Funktionen endlich vieler Veränderlichen weitgehende Analogien bestehen werden. Und in der Tat stützt sich z. B. der Poincaré-Volterrasche Satz auf den Heine-Borelschen, und andererseits hat die Gesamtheit der unmittelbaren und mittelbaren analytischen Fortsetzungen ψ des in bezug auf jedes $\delta < 1$ offenbar regulären Hilbertschen Beispiels[1])

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2^i} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} x_i^\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - x_i - 1}{2^i}$$

wegen $2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$ kontinuierlich viele Zweige.

Den Koeffizienten $a_i = a_i(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots)$ des linearen Gliedes $a_i \check{x}_i$ in ψ wollen wir als die Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ von $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots)$ im Punkte $\{x_i = \mathring{x}\}$ bezeichnen. Es bezeichne $\varphi_{x_i}(x_1, x_2, \ldots)$ die aus φ durch gliedweise Differenzierung $\frac{\partial}{\partial x_i}$ entstehende Potenzreihe. Man überzeugt sich leicht, daß $\lim_{m=+\infty} {}^{[m]}\varphi_{x_i} = a_i$, also $\varphi_{x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Wir werden beweisen, daß $|\varphi_{x_i}| <$ konst. auf $\mathfrak{R}_{\frac{\delta}{2}}$. Folglich ist die durch formales Ableiten erhaltene Potenzreihe $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ regulär in bezug auf $\frac{\delta}{2}$, falls φ regulär in bezug auf δ ist.

[12]) Siehe z. B. W. D. A. Westfall, Rend. Palermo 39 (1913), S. 75—76.

Es sei $|\lambda| \leqq 1$. Dann ist mit $\{x_i\}$ auch $\{\lambda x_i\}$ Punkt von $\mathfrak{R}_{\frac{\delta}{2}}$, also $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu \, {}^{[m]}_{(\nu)}\varphi(x_1, \ldots, x_m) = {}^{[m]}\varphi(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m)$ in jedem festen Punkt von $\mathfrak{R}_{\frac{\delta}{2}}$ für $|\lambda| \leqq 1$ absolut konvergent und dem Betrage nach $\leqq \Omega_\delta(\varphi)$, woraus die Cauchysche Koeffizientenabschätzung ergibt, daß

$$\left| \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0, 0, \ldots) \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} x_i \, {}^{[m]}\varphi_{x_i}(0, \ldots, 0) \right|$$
$$= \left| {}^{[m]}_{(1)}\varphi(x_1, \ldots, x_m) \right| \leqq \Omega_\delta(\varphi),$$

was in jedem Punkte von $\mathfrak{R}_{\frac{\delta}{2}}$, mit Rücksicht auf die bekannte Umkehrung der Schwarzschen Ungleichung, nur dann gelten kann, falls

$$\sum_i \left| \frac{\partial \varphi(0, 0, \ldots)}{\partial x_i} \right|^2 \leqq \left(\frac{\Omega_\delta(\varphi)}{\frac{\delta}{2}} \right)^2.$$

Unter Beachtung des Umgebungssatzes folgt also die Gradientenabschätzung

$$\sum_i \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^2 \leqq \left(\frac{2\,\Omega_\delta(\varphi)}{\delta} \right)^2 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{R}_{\frac{\delta}{2}}.$$

* * *

Es sei $\varphi \equiv {}_{(2)}\varphi = \sum_i \sum_k g_{ik} x_i x_k$; wegen $\varphi = \sum_i \sum_k \frac{g_{ik} + g_{ki}}{2} x_i x_k$ kann die Matrix als symmetrisch vorausgesetzt werden, und offenbar hat φ nur eine symmetrische Matrix (die nicht reell zu sein braucht). Die Vergleichung der Definition der Regularität mit den Untersuchungen der Herren Hellinger und Toeplitz[13]) ergibt unmittelbar, daß ${}_{(2)}\varphi$ dann und nur dann regulär ist in bezug auf ein festes δ (oder, der Homogenität zufolge, in bezug auf ein beliebiges δ), falls seine *symmetrisierte* Matrix zu einer im Hilbertschen Sinne beschränkten Bilinearform gehört oder, wie man kurz sagt, falls die symmetrisierte Matrix beschränkt ist. — Ohne die *kursiv* gesetzte Einschränkung ist freilich der Satz falsch, man denke nur an nicht beschränkte schiefsymmetrische Matrizen, deren Existenz durch die Theorie von Herrn Toeplitz[14]) sichergestellt ist. — Es gibt bekanntlich beschränkte quadratische Formen $\sum_i \sum_k g_{ik} x_i x_k$; $g_{ik} = g_{ki}$, so daß die beste Majorantenform $\sum_i \sum_k' g_{ik} x_i x_k$ nicht beschränkt ist[15]).

[13]) Math. Annalen **69** (1910), S. 321—327 (vgl. S. 304—305).

[14]) Math. Annalen **70** (1911), S. 351 ff.

[15]) O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1910, S. 499—503. — I. Schur, Journ. für Math. **140**, S. 1—28, insb. S. 19—20.

Es kann also φ in bezug auf jedes δ regulär sein, ohne daß $\bar{\varphi}$ in bezug auf ein noch so kleines δ regulär wäre. — Daraus, daß φ regulär ist in bezug auf jedes δ, folgt noch nicht die Existenz eines $\delta' > 0$ derart, daß φ auf $\mathfrak{R}_{\delta'}$ absolut konvergent oder $\lim_{m=\infty} {}^{[m]}\varphi$ daselbst gleichmäßig vorhanden wäre; die erste Behauptung folgt aus dem Hellinger-Toeplitzschen Kriterium der Beschränktheit[16]), die zweite mit Rücksicht auf $\sum_i x_i^2$. — Hingegen ist φ in jedem Punkte von $\mathfrak{R}_\delta$ stetig, falls es regulär ist in bezug auf δ. Wie man sich leicht überzeugt, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß der fragliche Punkt der Mittelpunkt von $\mathfrak{R}_\delta$ ist. Die Behauptung besagt dann, daß die obere Grenze $\eta = \eta(\varepsilon)$ von $|\varphi(x_1, x_2, \ldots) - \varphi(0, 0, \ldots)|$ auf $\mathfrak{R}_\varepsilon$ mit $\varepsilon \to 0$, und dies ergibt sich nach der Einführung des obigen λ aus der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung unmittelbar. Insbesondere gilt

$$\varphi(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots) \to \varphi(x_1, x_2, \ldots) \quad \text{für} \quad j \to +\infty,$$

falls $\{x_i\}$, $\{x_i^{(1)}\}$, $\{x_i^{(2)}\}$, ... Punkte von $\mathfrak{R}_\delta$ bezeichnen, so daß

$$\sum_i |x_i^{(j)} - x_i|^2 \to 0.$$

Es sei $\mathsf{M} = \sum_{\nu=0}^{\infty} m_\nu$ eine Reihe, in der die m_ν Monome von je endlich vielen x bezeichnen, so daß $m_\mu \equiv 0$, falls $m_\nu + m_\mu$ mit $\nu < \mu$ ein Monom ist und daß jedes nicht identisch verschwindende Monom von φ mit genau einem nicht identisch verschwindenden m_ν identisch ist und umgekehrt. Ist ein bestimmtes M von φ auf $\mathfrak{R}_\delta$ absolut und gleichmäßig konvergent, so gilt dies von sämtlichen M von φ; wir sagen dann, daß φ auf $\mathfrak{R}_\delta$ gleichmäßig konvergiert. Dann ist nach der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ gewiß absolut konvergent auf $\mathfrak{R}_{\frac{\delta}{2}}$.

Ein hinreichendes Kriterium der absoluten Konvergenz ergibt sich leicht aus einer Schlußweise von Herrn Bohr[17]). Es bezeichne $\mathfrak{W}_\delta$ die komplexe Mannigfaltigkeit $|x_i| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots$. Wir sagen nach Herrn Toeplitz[18]), daß φ begrenzt ist in bezug auf δ, wenn auf $\mathfrak{W}_\delta$ jedes ${}^{[m]}\varphi$ mit $m < +\infty$ konvergent und $|{}^{[m]}\varphi| \leqq$ konst. ist. Herr Bohr beweist, daß dann $\bar{\varphi}$ auf $\mathfrak{R}_\delta$ konvergent ist. Aus seinem Beweise geht hervor, daß es dann ein δ' gibt derart, daß auf $\mathfrak{R}_\delta$ $|\varphi| <$ konst., demnach also nicht nur φ, sondern auch $\bar{\varphi}$ regulär ist in bezug auf δ'. Es sei nämlich $\delta = 1$. Setzt man

[16]) a. a. O. [13]).
[17]) Göttinger Nachr. 1913, S. 462–463.
[18]) Göttinger Nachr. 1913, S. 417–432.

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} {}_{(\nu)}\varphi = c + \sum_i c_i x_i + \sum_{i \leqq k} \sum c_{ik} x_i x_k + \ldots :$$

$$C_0 = |c|^2, \quad C_1 = \sum_i |c_i|^2, \quad C_2 = \sum_{i \leqq k} \sum |c_{ik}|^2, \ldots,$$

so ist wegen $|{}_{(m)}\varphi| <$ konst. und nach dem Satze von Parseval

$$|c|^2 + \sum_i |c_i|^2 + \sum_{i \leqq k} \sum |c_{ik}|^2 + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu < +\infty,$$

also wegen

$$1 + \sum_i |x_i|^2 + \sum_{i \leqq k} \sum |x_i x_k|^2 + \ldots = \frac{1}{\prod_i (1 - |x_i|^2)} \quad \text{auf} \quad \mathfrak{R}_1$$

nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} {}_{(\nu)}\bar{\varphi}(|x_1|, |x_2|, \ldots) \leqq \sqrt{\frac{\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu}{\prod_i (1 - |x_i|^2)}}.$$

Da die bekannte elementare Schlußweise[19]) über absolut konvergente Produkte die Existenz einer positiven absoluten Konstante $\gamma < 1$ ergibt, zu der ein $\Gamma > 0$ gehört derart, daß $\prod_i (1 - |x_i|^2) > \Gamma$ gilt auf $\mathfrak{R}_\gamma$, so ist damit alles bewiesen. — Nun kann dieser Satz keinesfalls umgekehrt werden. Da nämlich φ regulär sein kann, ohne daß $\bar{\varphi}$ regulär wäre, so folgt aus der Regularität die Begrenztheit noch überhaupt nicht. Übrigens braucht man dazu keine bedingt beschränkten symmetrischen Matrizen zu kennen: es ist trivial, daß $\sum_{i \leqq k} \sum \frac{x_i x_k}{(i+k)^2}$ in jedem Punkte $\mathfrak{R}_1$ konvergent, also dem Hellinger-Toeplitzschen Kriterium[16]) zufolge in bezug auf jedes δ regulär ist, während die Form wegen $\sum_{i \leqq k} \sum \frac{1}{(i+k)^2} = +\infty$ in bezug auf kein δ begrenzt sein kann. — Ich erwähne diese wohlbekannten Dinge nur darum, weil die Hilbertsche Abhandlung[1]) — abgesehen von der (wegen der unendlichen Anzahl der Dimensionen nicht unwesentlichen und dennoch unbestimmt gelassenen) Wahl der $|x_i|$-Einheiten — sich nur mit solchen nicht quadratischen Potenzreihen beschäftigt, die begrenzt sind, während wir Ergebnisse erstreben, die Sätze der allgemeinen Theorie beschränkter Formen in sich enthalten und auch sonst an die ursprüngliche Hilbertsche Theorie angepaßt sind.

Eine Linearform $\varphi \equiv {}_{(1)}\varphi \equiv \sum_i a_i x_i$ heißt beschränkt, falls $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i | <$ konst. gilt auf $\mathfrak{R}_1$; hierfür ist $\sum_i |a_i|^2 < +\infty$ notwendig und

[19]) Siehe z. B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1922, S. 213—214.

hinreichend, da $\sqrt{\sum_i |a_i|^2}$ (>0) die genaue Schranke ist, und es auch $\sum_{i=1}^{m} |a_i x_i| < \sqrt{\sum_i |a_i|^2}$ auf $\mathfrak{R}_1$ gilt, da jedes x_i nur in einem Gliede vorkommt. Man ersieht so: Wird von einer Matrix $\|g_{ik}\|$ eine Aussage wie

$$\sum_i \left| \sum_k g_{ik} x_k \right|^2 < \text{Konst. auf } \mathfrak{R}_1$$

behauptet, so wird damit auch die absolute Konvergenz von $\sum_k g_{ik} x_k$ auf $\mathfrak{R}_1$ behauptet, und letzteres besagt das Beschränktsein dieser Linearform, da $\sqrt{\sum_i |a_i|^2}$ die genaue Schranke ist. — Offenbar sind die beschränkten Linearformen die regulären Linearformen.

Nach den Herren Hellinger und Toeplitz[20]) ist eine (nicht notwendig symmetrische) Matrix dann und nur dann beschränkt, falls die obige Bedingung, d. h.

$$\sum_i |f_i|^2 < \text{Konst. auf } \mathfrak{R}_1; \qquad f_i = \sum_i g_{ik} x_k$$

erfüllt ist. Wir haben also das Recht, zu definieren: Eine Potenzreihenfolge $\{f_i(x_1, x_2, \ldots)\}$ heißt beschränkt in bezug auf δ, falls jedes f_i regulär ist in bezug auf δ und die obere Grenze $\Omega_\delta(\{f_i\})$ von $\sum_i |f_i|^2$ auf $\mathfrak{R}_\delta$ endlich ist; eine Potenzreihenmatrix $\|g_{ik}(x_1, x_2, \ldots)\|$ heißt beschränkt in bezug auf δ, falls jedes g_{ik} regulär ist in bezug auf δ und die obere Grenze $\Omega_\delta(\|g_{ik}\|)$ von $\sum_i |\sum_k g_{ik} \xi_k|^2$ auf $\mathfrak{R}_\delta + \mathfrak{E}$ endlich ist, wobei $\mathfrak{E}$ die Mannigfaltigkeit $\sum_k |\xi_k|^2 = 1$ der komplexen Parameter ξ bezeichnet; es gilt dabei[20]) $\Omega_\delta(\|g_{ik}\|) = \Omega_\delta(\|g_{ki}\|)$. Einige klassische Probleme der Anwendungen weisen auf die Natürlichkeit dieser Begriffe hin[21]). — Ihre Brauchbarkeit hängt mit Umständen von folgender Art zusammen: Ist die Matrix $\|b_{ik}\|$ diejenige einer beschränkten Bilinearform, so ist mit $\{f_i\}$ auch die transformierte Folge $\{\sum_k b_{ik} f_k\}$ beschränkt in bezug auf δ; wenn wir also einen Existenzsatz z. B. über das System $\sum_k a_{ik} x_k = f_i$ beweisen wollen, wobei $|a_{ik}|$ eine eindeutige und beschränkte Reziproke $|b_{ik}|$ hat, so können wir ohne Einschränkung

[20]) a. a. O. [18]), S. 304, Fußnote.

[21]) Vgl. z. B. meine Note in Annalen der Phys. 82 (1927), S. 67—74. — Es sei hier wiederholt betont, daß $\{f_i\}$ in bezug auf jedes δ beschränkt sein kann, ohne daß $\{f_i\}$ in bezug auf ein noch so kleines δ beschränkt wäre, und zwar auch dann, wenn jedes f_i regulär ist in bezug auf jedes δ.

der Allgemeinheit voraussetzen, daß $|a_{ik}|$ die Einheitsmatrix ist. — Die Richtigkeit des erwähnten Faltungssatzes kann aus den Definitionen unmittelbar abgelesen werden.

Es sei $\{\xi_k\}$ auf $\mathfrak{E}$ vorgelegt und $\{f_i\}$ beschränkt in bezug auf δ. Dann ist, falls $\varphi = \sum_{k=1}^{m} f_k \xi_k$ gesetzt wird, einerseits $|\varphi| \leqq \sqrt{\Omega_\delta(\{f_i\})}$ auf $\mathfrak{R}_\delta$ (nach der Schwarzschen Ungleichung), andererseits ist φ regulär in bezug auf δ (als Summe endlich vieler solcher Potenzreihen). Nach der Gradientenabschätzung ist also $\sum_i \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \xi_k \right|^2 \leqq \frac{4\,\Omega_\delta(\{f_i\})}{\delta^2}$ auf $\mathfrak{R}_{\frac{\delta}{2}}$, mithin

$$\Omega_{\frac{\delta}{2}}\left(\left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right\| \right) \leqq \frac{4\,\Omega_\delta(\{f_i\})}{\delta^2}; \tag{0}$$

es gilt also der Konsistenzsatz: mit der Folge $\{f_i\}$ ist auch ihre Jacobische Matrix beschränkt (möglicherweise in bezug auf ein kleineres δ). Ist φ regulär, so ist nach dem Gradientensatz $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\}$, also nach dem Konsistenzsatz $\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right\|$, um so mehr $\left\| \frac{\partial^2 \varphi(0, 0, \ldots)}{\partial x_i \partial x_k} \right\|$ beschränkt, d. h. ${}_{(2)}\varphi$ regulär, und nach dem Gradientensatz auch ${}_{(1)}\varphi$.

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist mit $\{f_i\}$ und $\{F_i\}$ auch $\{f_i + F_i\}$ beschränkt. Ferner sind die Summe und das Produkt zweier beschränkten Potenzreihenmatrizen beschränkt usw.

Zweites Kapitel.

Existenzsätze.

Ein Fundamentalsatz der Hilbertschen Theorie besagt, daß, falls $\sum_i a_i y_i$ eine lineare und $\sum_i \sum_k a_{ik} y_i x_k$ eine bilineare beschränkte Form ist, die zum System $x_i - \lambda \sum_k a_{ik} x_k = a_i$ gehörigen Liouville-Neumannschen Reihen $x_i(\lambda)$ in einem hinreichend kleinen Kreis $|\lambda| <$ konst. konvergieren und $\sum_i |x_i(\lambda)|^2 <$ konst. ist[22]). Ich werde diesen Satz im Sinne des vorigen Abschnittes auf den nichtlinearen Fall übertragen. Wie ich in einer früheren Note[23]) ausgeführt habe, stößt der Beweis auf eigentümliche Schwierigkeiten, so daß es [wenigstens bei dem heutigen Stande

[22]) E. Hilb, Erlang. Sitzber. **40** (1908), S. 84—89; vgl. Fortschritte d. Math. **39** (1911), S. 407—408.

[23]) Math. Annalen **98** (1927), S. 273—280.

unserer Kenntnisse[24]) über die Klasse der Potenzreihen $\mathfrak{P}(\lambda)$, die für $|\lambda| < 1$ konvergent und dem Betrage nach $\leqq 1$ sind] für notwendig erscheint, einen Umweg durch die entsprechenden Differentialsysteme zu gehen. Es läßt sich alles in einem einzigen Satz zusammenfassen; der im Anhang[25]) einer früheren Arbeit von mir bewiesene Satz, der der Methode von Herrn Lindelöf[26]) zugänglich war, ist darin als *sehr* spezieller Fall enthalten. Er ist nicht nur deshalb als *sehr* speziell anzusehen, weil er sich auf ein Würfelgebiet (und nicht auf ein wesentlich feineres Kugelgebiet; s. o.) bezieht, sondern — und davon unabhängig[27]) — auch weil er noch innerhalb der Tragweite des Majorantenprinzips liegt. Es gilt nun zunächst

Satz I. *Sind* $\{f_i(x_1, x_2, \ldots)\}$ *und* $\|g_{ik}(x_1, x_2, \ldots)\|$ *beschränkt in bezug auf* δ, *so gibt es ein* $\Theta > 0$ *derart, daß das totale Differentialsystem*

$$\frac{dx_i}{dt} \equiv x_i' = f_i + t \sum g_{ik} \cdot x_k'; \qquad x_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

eine im Kreise

$$\mathfrak{k}_\Theta: \qquad |t| < \Theta$$

holomorphe Lösung $\{x_i(t)\}$ *hat und daß* $\sum_i |x_i(t)|^2 < \delta^2$ *auf* $\mathfrak{k}_\Theta$ *gilt; und zwar kann der Radius* Θ *derart gewählt werden, daß er bloß von den drei Zahlen* δ, $\Omega_\delta(\{f_i\})$, $\Omega_\delta(\|g_{ik}\|)$ *abhängt und bei festem* δ *über alle Grenzen wächst, falls* $\Omega_\delta(\{f_i\}) + \Omega_\delta(\|g_{ik}\|) \to 0$[28]). *Die Annahme* $\frac{\partial f_i}{\partial t} \equiv \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} \equiv 0$ *bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da im nichtstationären Fall zu* (1) *die Gleichung* $x_0' = f_0 + \sum_k g_{0k} x_k'$ *mit* $f_0 \equiv 1$, $g_{0k} \equiv 0$, $x_0(0) = 0$ *adjungiert werden kann.*

Der Akzent soll immer d/dt bezeichnen. Es sei ferner $[\mathfrak{P}]_n = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu t^\nu$, falls $\mathfrak{P} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu t^\nu$ bei $t = 0$ holomorph und A_ν von t unabhängig ist.

[24]) Vgl. z. B. I. Schur u. G. Szegö, Berl. Sitzber. (1925), S. 545—546, wobei für unsere Zwecke das Hindernis in $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\log 2n}{n}\right) = 0$ besteht. Daß der Beweis des obigen Satz II dennoch gelingt, erklärt sich (mit Rücksicht auf die Monotonie der Schur-Szegöschen Radienfolge) *nur* dadurch, daß dabei die Schritte des Teilsummenalgorithmus *nicht* von einander unabhängig sind.

[25]) Math. Annalen **96** (1926), S. 311—312.

[26]) Bull. Darboux **23**, I, S. 68—75; vgl. meine Noten Astr. Nachr. **223** (1924), S. 99—102; Math. Zeitschr. **24** (1925), S. 259—265.

[27]) Vgl. den Anhang dieses Aufsatzes.

[28]) D. h., setzt man $\Theta = \Theta(\delta, M_1, M_2)$, $M_1 = \Omega_\delta(\{f_i\})$, $M_2 = \Omega_\delta(\|g_{ik}\|)$, so ist $\lim_{\substack{M_1 \to 0 \\ M_2 \to 0}} \Theta(\delta, M_1, M_2) \equiv +\infty$.

Man setze in Satz I $g_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$. Wir behaupten, daß die im Satz I gemeinte Lösung von

$$x_i' = f_i + t \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} x_k' \qquad (i, k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

auch dem impliziten System

$$X_i = t f_i(X_1, X_2, \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

genügt. Wir werden nämlich sehen, daß die Teilsummen $[x_i]_n$ und $[X_i]_n$ aus (2) bzw. (3) in einem festen Kreise $|t| < \vartheta$ rekursiv berechnet werden können, wobei ϑ bloß von δ, $\Omega_\delta(\{f_i\})$, $\Omega_\delta(\|g_{ik}\|) = \Omega_\delta\left(\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right\|\right)$, also nicht von $\{f_i\}$ selbst abhängt, so daß dasselbe ϑ zum selben Zweck z. B. auch bei den Abschnittssystemen

$$\begin{aligned} x_{im}' &= f_i(x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{mm}, 0, 0, \ldots) \\ &+ t \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i(x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{mm}, 0, 0, \ldots)}{\partial x_{km}} x_{km}' \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned} \tag{2'}$$

$$X_{im} = t f_i(X_{1m}, X_{2m}, \ldots, X_{mm}, 0, 0, \ldots) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3'}$$

brauchbar ist. Nun hat man $x_{im}(t) \equiv X_{im}(t)$, d. h. $[x_{im}]_n \equiv [X_{im}]_n$, was wegen des *rekursiven* Charakters und der Unabhängigkeit des ϑ von den f_i identisch in den Koeffizienten der $f_i(x_1, x_2, \ldots)$ nur dann bestehen kann, wenn $[x_i]_n \equiv [X_i]_n$, d. h. $x_i(t) \equiv X_i(t)$ ist. Mit Rücksicht auf den Konsistenzsatz (0) gilt also

Satz II. *Ist $\{f_i(x_1, x_2, \ldots)\}$ beschränkt in bezug auf δ, so gibt es ein bloß von δ und $\Omega_\delta(\{f_i\})$ abhängiges und bei festem δ mit $\frac{1}{\Omega_\delta(\{f_i\})}$ über alle Grenzen wachsendes Θ von der folgenden Beschaffenheit: Das System $x_i = t f_i$ hat auf $\mathfrak{k}_\Theta$ eine holomorphe Lösung $\{x_i(t)\}$ mit $\sum_i |x_i(t)|^2 < \delta^2$ (die Annahme $\frac{\partial f_i}{\partial t} \equiv 0$ bedeutet mit Rücksicht auf die Adjungierbarkeit von $x_0 = t f_0 \equiv t$ keine Einschränkung der Allgemeinheit).*

Denken wir uns im Differentialsystem (1), d. h.

$$x_i' - t \sum_k g_{ik} x_k' = f_i \tag{4}$$

die x_i auf $\mathfrak{K}_\delta$ beliebig festgehalten, wodurch (4) in ein gewöhnliches lineares System der x_i' übergeht. Man hat nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} &\sum_i |f_i(x_1, x_2, \ldots)|^2 \leqq \Omega_\delta(\{f_i\}) = \Omega_1 < +\infty \quad \text{auf} \quad \mathfrak{K}_\delta, \\ &\sum_i \left|\sum_k g_{ik}(x_1, x_2, \ldots)\xi_k\right|^2 \leqq \Omega_\delta(\|g_{ik}\|) = \Omega_2 < +\infty \quad \text{auf} \quad \mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{E}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei $\mathfrak{E}: \sum_k |\xi_k|^2 = 1$. Führt man den Liouville-Neumannschen Ansatz

$$x_i' = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{in} t^n \equiv F_i(t; x_1, x_2, \ldots); \qquad \gamma_{in} = \gamma_{in}(x_1, x_2, \ldots) \tag{6}$$

in (4) ein, so ergibt sich die Rekursion

$$\gamma_{in} = \sum_k g_{ik} \gamma_{kn-1}; \quad \gamma_{i0} = f_i, \tag{7}$$

also $\sum_i |\gamma_{i0}|^2 \leqq \Omega_1$ auf $\mathfrak{R}_\delta$. Sind die γ_{in-1} auf $\mathfrak{R}_\delta$ derart eindeutig bestimmt, daß $\sum_i |\gamma_{in-1}|^2 \leqq \Omega_1 \Omega_2^{n-1}$, so sind die γ_{in} durch (7) wegen (5) auf $\mathfrak{R}_\delta$ eindeutig bestimmt und zwar derart, daß $\sum_i |\gamma_{in}|^2 \leqq (\sqrt{\Omega_1 \Omega_2^{n-1}})^2 \Omega_2 = \Omega_1 \Omega_2^n$ ausfällt (man beachte nur die Homogenität zweiten Grades in den ξ). Man hat also, falls

$$|t| < \text{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\Omega_2}\right)$$

vorausgesetzt wird, für jedes $N \geqq 0$

$$\sum_i \left(\sum_{n=N}^{\infty} |\gamma_{in} t^n|\right)^2 \leqq \sum_i \sum_{n=N}^{\infty} |\gamma_{in} \sqrt{t^n}|^2 \sum_{m=N}^{\infty} |\sqrt{t^m}|^2 \tag{8}$$

$$\leqq \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{n=N}^{\infty} |t|^n \sum_i |\gamma_{in}|^2 \leqq \frac{\Omega_1}{2^{N-1}} \sum_{n=N}^{\infty} |t\Omega_2|^n \leqq \frac{\Omega_1}{2^{2(N-1)}} \leqq 4\Omega_1.$$

Es sei $\alpha > 0$. Da das gewöhnliche System (4) unverändert bleibt, wenn darin $\frac{t}{\alpha}$ an Stelle von t und zugleich αg_{ik} an Stelle von g_{ik}, also $\alpha^2 \Omega_2$ an Stelle von Ω_2 geschrieben wird (f_i und Ω_1 bleiben unverändert), so gilt (8) auch für

$$\left|\frac{t}{\alpha}\right| < \text{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\alpha^2 \Omega_2}\right),$$

also $\left(\text{mit } \alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{\Omega_2}}\right)$ auch für

$$|t| < \Delta = \frac{1}{\sqrt[4]{\Omega_2}} \cdot \text{Min}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{\Omega_2}}\right).$$

Es ist aus der Theorie der linearen Systeme bekannt, daß, sobald die Neumannschen Reihen in einem Kreisgebiet konvergieren, sie daselbst die einzige quadratisch konvergente Lösung darstellen, so daß die Holomorphie in t des Ansatzes (6) keine Einschränkung enthält. Mithin ist das Differentialsystem (6) eine Folge von (4), d. h. von (1) (wenigstens wenn man sich auf quadratisch konvergente Lösungen beschränkt); umgekehrt, (1) ist eine Folge von (6), da (4) durch (6) befriedigt wird. Für die

Abschnittsysteme

$$(4)' \qquad x'_{im} - t\sum_{k=1}^{m} {}^{[m]}g_{ik}\, x'_{km} = {}^{[m]}f_i \,. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

bestehen die entsprechenden Abschätzungen erst recht, s. (5).

Indem man (6) und (8) berücksichtigt, schließt man so aus dem Konsistenzsatz (0) und aus $\Delta \to +\infty$ bei $\Omega_2 \to 0$, daß es genügt, statt Satz I den folgenden Satz zu beweisen:

Satz III. *Es sei* $\{f_i(t; x_1, x_2, \ldots)\}$ *eine Potenzreihenfolge, derart, daß* f_i *konvergiert und* $\sum_i |f_i|^2 < \Omega^2 < +\infty$ *ist auf* $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta$, *wobei* $\mathfrak{k}_\Delta$ *den Kreis* $|t| < \Delta$ *bezeichnet. Dann hat das System* $x'_i = f_i$ *eine mit* t *verschwindende und der Bedingung* $\sum_i |x_i(t)|^2 < \delta^2$ *Genüge leistende holomorphe Lösung* $\{x_i(t)\}$ *für*

$$(9) \qquad |t| < \Theta = \operatorname{Min}\left(\Delta, \frac{\delta}{2\Omega}\right).$$

Beweis von Satz III. Wenn eine Lösung von der verlangten Art überhaupt vorhanden ist, so müssen für die zugehörigen Teilsummen $s_{in} = s_{in}(t) = [x_i]_n$ identisch in t die Relationen

$$(10) \qquad s'_{in+1} = [f_i(t; s_{1n}, s_{2n}, \ldots)]_n; \qquad s_{in}(0) = 0$$

bestehen. Für $n = 0$ ergibt sich hieraus $s'_{i1} = f_i(0; 0, 0, \ldots)$, d. h.

$$(11) \qquad s_{i1} = t f_i(0; 0, 0, \ldots),$$

also

$$\sum_i |s_{i1}|^2 < |t|^2 \Omega^2 < \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 < \delta^2,$$

wegen (9) und da

$$(12) \qquad \sum_i |f_i(t; x_1, x_2, \ldots)|^2 < \Omega^2 \text{ auf } \mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta.$$

Wir wollen von n auf $n+1$ schließen. Setzen wir voraus, daß die zu einem festen n gehörigen s_{in} schon bekannt sind, und daß

$$(13) \qquad \sum_i |s_{in}|^2 < \delta^2 \text{ gilt auf } \mathfrak{k}_\Theta.$$

Ist

$$f_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots) \equiv {}^{[m]}f_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^{[m]}_{(\nu)}f_i,$$

wobei ${}^{[m]}_{(\nu)}f_i$ eine ganze Form vom Grade ν von $1+m$ Veränderlichen bedeutet, so sollen die $\sum_{\nu=0}^{N} {}^{[m]}_{(\nu)}f_i$ die „Teilsummen" von ${}^{[m]}f_i$ genannt werden. Auf ${}^{[m]}\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta$, wobei ${}^{[m]}\mathfrak{K}_\delta$ die Mannigfaltigkeit $\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 < \delta^2$ bezeichnet, ist ${}^{[m]}f_i$ wegen (12) dem Betrage nach $< \Omega$, ferner absolut konvergent,

da f_i daselbst konvergiert. Folglich ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} {}^{[m]}_{(\nu)}f_i(t; x_1, \ldots, x_m) = {}^{[m]}f_i(\lambda t; \lambda x_1, \ldots, \lambda x_m)$$

in jedem festen Punkt von ${}^{[m]}\mathfrak{R}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta$ für $|\lambda| < \theta < 1$ holomorph und die Beträge seiner Teilsummen sind nach Cauchy unterhalb einer bloß von Ω und θ abhängigen Schranke gelegen; das gleiche gilt für die „Teilsummen" von ${}^{[m]}f_i(t; x_1, \ldots, x_m)$ auf ${}^{[m]}\mathfrak{R}_{\theta\delta} + \mathfrak{k}_\Delta$; da $\delta - \theta\delta$ beliebig klein sein darf, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß sie auf $\mathfrak{R}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta$ unterhalb einer Schranke $K = K_{im} < +\infty$ liegen. — Da ${}^{[m]}f_i$ auf ${}^{[m]}\mathfrak{R}_\delta$ absolut konvergiert, so gibt es nach Cauchy ein $\eta = \eta_{im}$ derart, daß die Konvergenz für $|t| < \eta_{mi}$; $|x_j| < \eta_{mi}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ gleichmäßig ist, und da die m Polynome s_{jn} mit t verschwinden, so gibt es ein $\varrho = \varrho_{mi}$ derart, daß

$$(14)' \qquad {}^{[m]}f_{in}(t) \equiv {}^{[m]}f_i(t; s_{1n}, \ldots, s_{mn})$$

für $|t| < \varrho_{mi}$ gleichmäßig konvergiert. Nun sind die „Teilsummen" von ${}^{[m]}f_i$ auf ${}^{[m]}\mathfrak{R}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta$, also, wegen (13), die (in t polynomischen) Teilsummen von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} {}^{[m]}_{(\nu)}f_i(t; s_{1n}, \ldots, s_{mn}) = {}^{[m]}f_{in}(t)$$

auf $\mathfrak{k}_\omega$ dem Betrage nach $< K_{im}$; mithin ist $(14)'$ nach Stieltjes nicht nur auf $\mathfrak{k}_{\varrho_{mi}}$, sondern auch auf $\mathfrak{k}_\Theta$ holomorph; und wegen (12), (13) dem Betrage nach $< \Omega$. Da f_i auf $\mathfrak{R}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta$ konvergiert, so ist auf $\mathfrak{k}_\Theta$ wegen (13) der Grenzwert

$$(14)'' \qquad f_{in}(t) \equiv \lim_{m \to +\infty} {}^{[m]}f_{in}(t)$$

vorhanden und dem Betrage nach $< \Omega$, so daß ${}^{[m]}f_{in}(t)$, $m = 1, 2, \ldots$, $f_{in}(t)$ holomorph ist auf $\mathfrak{k}_\Theta$. Jetzt können wir s_{in+1} wegen (10), (13), (14) und mit Rücksicht auf die Definition

$$(15) \qquad f_i(t; s_{1n}, s_{2n}, \ldots) = \lim_{m \to +\infty} {}^{[m]}f_i(t; s_{1n}, \ldots, s_{mn})$$

durch

$$(16) \qquad s_{in+1} = \int_0^t [f_{in}(t)]_n \, dt$$

erklären, und wir haben nur noch zu beweisen, daß (13) bestehen bleibt, wenn darin $n+1$ an Stelle von n gesetzt wird. Der Beweis ist in meiner Note [23]) ausgeführt, ich wiederhole ihn nur zur Bequemlichkeit des Lesers. Es sei $\{\xi_i\}$ auf $\mathfrak{E}$: $\sum_i |\xi_i|^2 = 1$ beliebig vorgegeben. Da auf $\mathfrak{k}_\Theta$ wegen (12), (13) die Abschätzung $\sum_i |f_{in}(t)|^2 < \Omega^2$ gilt, so ist daselbst

$$\sum_{i=N}^{\infty} |f_{in}(t)\,\xi_i| < \Omega \sqrt{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^2};$$

folglich ist

$$\Phi_n(t;\xi) \equiv \Phi_n(t;\xi_1,\xi_2,\ldots) \equiv \sum_i f_{in}(t)\,\xi_i$$

auf $\mathfrak{k}_\Theta + \mathfrak{E}$ absolut konvergent, in jedem Punkte von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{k}_\Theta$ gleichmäßig konvergent, also holomorph, und dem Betrage nach $< \Omega$. Man hat also wegen (16) auf $\mathfrak{k}_\Theta$ nach der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung

$$\left|\sum_i \xi_i t\, s'_{in+1}\right| \leqq \frac{\delta}{2\Omega}\left|\sum_i \xi_i [f_{in}]_n\right| = \frac{\delta}{2\Omega}\,|[\Phi_n]_n| < \frac{\delta}{2\Omega}(n+1)\Omega < \frac{\delta}{2}(n+2),$$

ferner wegen $[s_{in}]_\nu = s_{i\nu}$, $\nu \leqq n$ und der Fejérschen Mittelsummenabschätzung

$$\left|\sum_i \xi_i \sum_{\nu=1}^{n+1} s_{i\nu}\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{n+1}\sum_i \xi_i \int_0^t [f_{in}]_{\nu-1}\,dt\right|$$

$$= \left|\int_0^t \sum_{\nu=1}^{n+1} [\Phi_n]_{\nu-1}\,dt\right| \leqq |t|\,(n+2)\,\Omega < \frac{\delta}{2}(n+2),$$

also

$$\left|\sum_i \xi_i \left(t\, s'_{in+1} + \sum_{\nu=1}^{n+1} s_{i\nu}\right)\right| < \delta\,(n+2),$$

wobei der Faktor von ξ_i wegen der wohlbekannten Identität

$$(n+2)\,[\mathfrak{P}]_{n+1} = t\,[\mathfrak{P}]'_{n+1} + \sum_{\nu=0}^{n+1} [\mathfrak{P}]_\nu$$

$\equiv (n+2)\,s_{in+1}$ ist. Nun kann $|\sum_i \xi_i s_{in+1}| < \delta$ in jedem Punkte von $\mathfrak{E}$ nur dann bestehen, falls $\sum_i |s_{in+1}|^2 < \delta^2$, womit die vollständige Induktion beendet ist. — Bezeichnet $x_i(t)$ die Potenzreihe mit $[x_i]_n = s_{in}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, so ist sie wegen $|s_{in}| < \delta$ nach Abel auf $\mathfrak{k}_\Theta$ konvergent und wegen (13) derart, daß $\sum_i |x_i(t)|^2 \leqq \delta^2$. Würde hierbei bei einem t das Gleichheitszeichen gültig sein, so würde es zu diesem t auf $\mathfrak{E}$ einen Punkt mit $|\sum_i x_i(t)\,\xi_i| = \delta$ geben; da die Funktion $\sum_i x_i(t)\,\xi_i$ wegen $\sum_{i=N}^{\infty} |x_i(t)\,\xi_i| \leqq \delta \sqrt{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i|^2}$ holomorph auf $\mathfrak{k}_\Theta$ und $\mathfrak{k}_\Theta$ offen ist, so gilt also das Gleichheitszeichen wegen $x_i(0) = 0$ nicht. — Endlich folgt das Bestehen von $x'_i(t) = f_i(t; x_1(t), x_2(t) \ldots)$ daraus, daß (10) für jedes n besteht.

Damit sind die obigen drei Existenzsätze bewiesen.

Da der in (10) in der Klammer stehende Ausdruck gemäß der Konvergenzdefinition einer Potenzreihe von unendlich vielen Veränderlichen durch (15) erklärt wurde, während es für das Bestehen von $x'_i = f_i$ schon hinreicht, daß die Teilsummen der darin beiderseits stehenden, für $|t| < \Theta$ holomorphen Potenzreihen von t miteinander identisch sein sollen, so

erhebt sich die Frage, ob es nur eine holomorphe Lösung geben kann. Die Antwort ist verneinend; man beachte nur, daß $f_i(t; x_1, x_2, \ldots)$ auf keinem $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta$ absolut zu konvergieren braucht, während es als einfache Reihe geordnet bedingt konvergent ist und nicht notwendig die Summe $\lim_{m=\infty} {}^{[m]}f_i$ ergibt. Es ist nun, falls die f_i z. B. quadratische Funktionen bedeuten, die auf $\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{k}_1$ nicht absolut konvergieren, eine solche Umordnung ihrer Glieder möglich, daß die Abschätzung $\sum_i |s_{i\,n+1}| < \delta^2$ auf $\mathfrak{k}_\Theta$ besteht, ohne daß (16) gilt. Hingegen ist die mit t verschwindende holomorphe Lösung offenbar eindeutig bestimmt, falls die f_i auf $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta$ absolut konvergieren[21]), was bei natürlichen Anwendungen wohl immer der Fall sein wird. Die vorhin konstruierte Lösung ist unter den möglicherweise noch vorhandenen für alle Fälle ausgezeichnet, indem einerseits die obigen $s_{i\,n}$ aus den zum Abschnittssystem

$$x'_{i\,m} = {}^{[m]}f_i(t; x_{1\,m}, \ldots, x_{m\,m}); \quad x_{i\,m}(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

gehörigen, eindeutig bestimmten $x_{i\,m}(t)$ bzw. $[x_{i\,m}]_n$ durch gewisse eindeutige und zugleich auch plausible (allerdings zweifache) Grenzübergänge erhalten werden können, und da andererseits ein unendliches System für die Anwendungen häufig nur die Gesamtheit seiner derartigen Abschnitte bedeutet. — Oben, bei (3), ist unter „der" holomorphen Lösung die zu (15) gehörige gemeint. In Satz I hat man wegen (8) gewiß Eindeutigkeit, falls die f_i und $g_{i\,k}$ auf $\mathfrak{K}_\delta$ absolut konvergent sind. Was endlich Satz II betrifft, so genügt es zu bemerken, daß mit f_i auch $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ absolut konvergent ist auf $\mathfrak{K}_\delta$.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Mannigfaltigkeit von gewissen Parametern μ, in bezug auf welche die f_i und die $g_{i\,k}$ z. B. ebenfalls Potenzreihen sind, und es sollen die Ω, δ, Δ auf $\mathfrak{M}$ gleichgradig gewählt werden können; dann gilt dasselbe auch von den Θ. — Es sei dabei $\mathfrak{M}_\varepsilon : |\mu_j| < \varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots, l$ $(< +\infty)$, und es sollen die f_i auf $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{k}_\Delta + \mathfrak{M}_\varepsilon$ im obigen Sinne (S. 457) gleichmäßig konvergieren. Dann sind die $x_i = x_i(t; \mu_1, \ldots, \mu_l)$ in Satz III auf $\mathfrak{k}_\Theta + \mathfrak{M}_\varepsilon$ holomorph. Wegen (13) genügt es, die Behauptung von den $s_{i\,n}$ zu beweisen. Dies ist aber bei $n = 1$ wegen (11) trivial; bei $n > 1$ folgt es ebenfalls aus der Gleichmäßigkeit der Konvergenz auf Grund von (10) mit Hilfe einer vollständigen Induktion. Ebenso beweist man, daß im Falle der gleichmäßigen Konvergenz $x_{i\,m} \to x_i$ für $m \to \infty$, und zwar auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{k}_\Theta + \mathfrak{M}_\varepsilon$ gleichmäßig. — Beide Sätze übertragen sich wegen (8) auf den Fall von Satz I, falls die $g_{i\,k}$ auf $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{M}_\varepsilon$ gleichmäßig konvergieren. Was endlich Satz II betrifft, so genügt es zu bemerken, daß $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ auf $\mathfrak{K}_{\frac{\delta}{2}} + \mathfrak{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gewiß absolut konvergiert, falls dies von f_i auf $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{M}_\varepsilon$ gilt (vgl. S. 455 ff.). Es gilt also

Satz IIa. *Es sei auf* $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{M}_\varepsilon$ *jedes* $f_i(x_1, x_2, \ldots; \mu_1, \ldots, \mu_l)$ *gleichmäßig konvergent und* $\sum_i |f_i|^2 < \omega < +\infty$. *Dann gibt es ein* $\Theta = \Theta(\delta, \omega) > 0$ *mit* $\lim_{\omega \to 0} \Theta(\delta, \omega) = +\infty$ *derart, daß* $x_i = t f_i$ *in jedem Punkt von* $\mathfrak{M}_\varepsilon$ *auf* $\mathfrak{K}_\Theta$ *genau eine holomorphe Lösung hat, wobei* $\sum_i |x_i|^2 < \delta^2$. *Die* x_i *sind auf* $\mathfrak{K}_\Theta + \mathfrak{M}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ *holomorph.*

Es folgt ferner aus Satz II:

Satz IIα. *Es seien* $\{f_i(x_1, x_2, \ldots)\}$ *und* $\{h_i(x_1, x_2, \ldots)\}$ *beschränkt in bezug auf* δ. *Dann gibt es ein* η *derart, daß* $x_i = t_1 f_i + t_2 h_i$ *in jedem Punkte des Gebietes* $|t_1| < \eta$, $|t_2| < \eta$ *eine Lösung* $\{x_i(t_1, t_2)\}$ *mit* $\sum_i |x_i|^2 < \delta^2$ *hat.*

In der Tat, schreibt man das System in der Form $x_i = t F_i$ mit $F_i = t_1 f_i + t_2 h_i$ und $t = 1$, so kann die obere Grenze von $\sum_i |F_i|^2$ auf $\mathfrak{K}_\delta$ mit η beliebig klein gemacht werden; ist also η hinreichend klein, so wird $\Theta > 1$ (wegen $\lim_{\omega \to 0} \Theta(\delta, \omega) \equiv +\infty$), so daß auch $t = 1$ erlaubt ist. — Die Lösung hängt von t_1 und t_2 laut Satz IIa gewiß holomorph ab, falls die f_i und h_i auf $\mathfrak{K}_\delta$ gleichmäßig konvergent sind, usw. Es gilt z. B.

Satz IIα. *Es sei auf* $\mathfrak{K}_\delta + \mathfrak{M}_\varepsilon$ *jedes* $f_i(x_1, x_2, \ldots; \mu_1, \ldots, \mu_l)$ *gleichmäßig konvergent und es möge* $\sum |f_i|^2 <$ konst. *sein. Es bezeichne* ${}_{(\nu)}f_i(x_1, x_2, \ldots; \mu_1, \ldots, \mu_2)$ *denjenigen Teil von* f_i, *der in den* x_i *homogen vom Grade* ν *ist und* ${}_{(\nu)}f_i^{(0)}$ *diejenige Form der* x_i, *in welche* ${}_{(\nu)}f_i$ *im Mittelpunkt von* $\mathfrak{M}_\varepsilon$ *übergeht. Es sei* ${}_{(0)}f_i^{(0)} \equiv {}_{(1)}f_i^{(0)} \equiv 0$. *Dann gibt es ein* $\eta > 0$ *derart, daß* $x_i = f_i$ *auf* $\mathfrak{M}_\eta$ *genau eine holomorphe Lösung* $\{x_i(\mu_1, \ldots, \mu_l)\}$ *hat, und es gilt dabei* $\sum_i |x_i|^2 < \delta^2$.

Der Beweis ergibt sich aus dem vorstehenden unmittelbar, wenn man den vielfach verwendeten λ-Kunstgriff heranzieht. Man sieht auch, daß es genügt, wenn statt von ${}_{(0)}f_i^{(0)} \equiv {}_{(1)}f_i^{(0)} \equiv 0$ die obere Grenze von $\sum_i |{}_{(0)}f_i^{(0)}|^2 + \sum_i |{}_{(1)}f_i^{(0)}|^2$ auf $\mathfrak{K}_\delta$ hinreichend klein im Verhältnis zu $\sum |f_i|^2$ ist.

Es sei schließlich erwähnt, daß, falls auch $\sum_i |\bar{f}_i| <$ konst. vorausgesetzt wird[21]), sich mit der Methode von Herrn Lindelöf[26]) alles in einigen Zeilen und ohne einen Umweg über die Differentialsysteme erledigen läßt. Es ergibt sich dabei die Holomorphie auf $\mathfrak{M}_\varepsilon$ auch ohne die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz. Da dann die Prämissen bei $x_i = t f_i$ und $x_i = t \bar{f}_i$ zugleich erfüllt sind, so beweist man den Existenzsatz zunächst bei dem zweiten System, und schließt dann auf Grund des Majorantenprinzips nicht nur auf $x_i = t f_i$, sondern auch auf $x_i' = f_i$

[mit $x_i(0) = 0$], da gemäß einer bis auf Briot und Bouquet [29]) zurückgehenden Bemerkung auch letzteres System das System $x_i = t\bar{f}_i$ zum Majorantensystem hat.

In dem vorstehenden handelt es sich hingegen um folgendes. Die zitierte Lindelöfsche Majorantenmethode liefert z. B. bei dem gewöhnlichen System von gewöhnlichen Gleichungen

$$x_i = t\Big(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_k + a_i\Big), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

bei dem die Konvergenzradien (wegen der Existenz eines Eigenwertes, der endlich sein soll) endlich sind, aus methodischen Gründen nur dieselben Konvergenzradien wie bei dem System von Differentialgleichungen

$$x_i' = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_k + a_i, \qquad x_i(0) = 0,$$

wo die $x_i(t)$ ganze Funktionen sind: sie kann das Eintreten der Integrationsdivisoren nicht verwerten [30]), obwohl sie das *beste* Majorantensystem betrachtet, während unter unseren Voraussetzungen und im nichtlinearen Fall der Beweis nur unter Benutzung der Integrationsdivisoren gelang [31]) und für das entsprechende implizite System nur indirekt [23]), [24]).

Anhang.

Es sei $\{f_i(x_1, x_2, \ldots)\}$ eine Potenzreihenfolge, so daß jedes f_i auf $\mathfrak{B}_\delta : |x_j| < \delta;\ j = 1, 2, \ldots$ absolut konvergiert und die obere Grenze von $|f_i|$ auf $\mathfrak{B}_\delta$ unterhalb einer von i unabhängigen Schranke liegt. Wir sagen dann, daß $\{f_i\}$ stark begrenzt ist in bezug auf δ. Ist auch $\{\bar{f}_i\}$ stark begrenzt in bezug auf δ, so sagen wir, daß $\{f_i\}$ absolut stark begrenzt ist in bezug auf δ. Aus den Untersuchungen von Herrn Toeplitz [18]) geht hervor, daß $\{f_i\}$ in bezug auf jedes δ stark begrenzt sein kann, ohne daß es in bezug auf ein noch so kleines δ absolut stark begrenzt wäre. — In meinen unter [26]) zitierten Noten habe ich bewiesen, daß, falls $\{f_i\}$ absolut stark begrenzt ist in bezug auf ein δ, $x_i' = f_i$ und auch $x_i = tf_i$ in einem Kreis $|t| <$ konst. genau eine mit t verschwindende holomorphe Lösung $\{x_i(t)\}$ hat, und zwar derart, daß $|x_i(t)| < \delta$. Es läßt sich nun offenbar auf dem vor-

[29]) Theorie der doppelt-periodischen Funktionen, übersetzt von H. Fischer, Halle 1862, S. 428ff.

[30]) Allerdings könnte man daran denken, die zitierte Lindelöfsche Methode mit einer anderen, ebenfalls von ihm [Journ. de Math. IV. **10** (1894), S. 117—128] herrührenden zu kombinieren, doch sind damit die Schwierigkeiten noch nicht aus dem Wege geräumt, da diese zweite Methode (im Gegensatz zur ersten) im Falle von $m = +\infty$ versagt, wie aus ihrer Radiusformel hervorgeht.

[31]) Vgl. S. 466.

hin gegangenen Wege zeigen, daß die gesperrt gesetzte Einschränkung überflüssig ist. Freilich muß man dann bei $x_i = t f_i$ ebenfalls den Umweg über $x_i' = f_i$ und $x_i' = f_i + t \sum_k g_{ik} x_k'$ machen. Die Klasse der Matrizen $\| g_{ik} \|$, bei welcher das Analogon des Konsistenzsatzes gilt und die Elimination der quasilinearen Glieder gelingt, ist diejenige, wo auf $\mathfrak{W}_\delta$ jedes g_{ik} absolut konvergent ist und dabei $\sum_k | g_{ik} | <$ konst. für $i = 1, 2, \ldots$ gilt. Solche Würfelsätze sind von den obigen Kugelsätzen unabhängig und umgekehrt. Genauer: $\{\bar{f}_i\}$ kann in bezug auf jedes δ beschränkt sein, ohne daß $\{f_i\}$ in bezug auf ein noch so kleines δ stark begrenzt wäre[32]); und $\{\bar{f}_i\}$ kann in bezug auf jedes δ stark begrenzt sein, ohne daß $\{f_i\}$ in bezug auf ein noch so kleines δ beschränkt wäre[33]).

[32]) Es sei z. B. $f_i = \frac{1}{i} + \sum_k \frac{x_k}{i+k}$ $\left(\text{bekanntlich sind die Formen } \sum \frac{x_i}{i}, \sum\sum \frac{x_i x_k}{i+k} \text{ beschränkt}\right)$.

[33]) Es sei z. B. $f_i = 1 + \sum_k \frac{x_k}{(i+k)^2}$. Die starke Begrenztheit erlaubt, daß die f_i „von derselben Größenordnung" seien, was für manche Anwendungen [siehe z. B. meine erste Note [26])] aus leicht ersichtlichen Gründen wichtig ist; andere Anwendungen [siehe z. B. [21])] verlangen hingegen eine Kugelbedingung.

(Eingegangen am 1. Juli 1927.)

Über den Vektorenbereich eines konvexen Körpers.

Von

Theodor Estermann in London.

Herr Rademacher[1]) hat den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. Bezeichnen wir den Vektorenbereich des beliebigen konvexen ebenen Bereiches K mit W und die Flächeninhalte von K und W mit $F(K)$ und $F(W)$, so ist $4\,F(K) \leqq F(W) \leqq 6\,F(K)$; das erste Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn K einen Mittelpunkt besitzt, das zweite dann und nur dann, wenn K ein Dreieck ist.

Der Vektorenbereich W ist dabei folgendermaßen definiert: Ein Punkt (x, y) gehört zu W, wenn es in K zwei Punkte (x_1, y_2) und (x_2, y_2) gibt, so daß $x = x_2 - x_1$ und $y = y_2 - y_1$ ist.

Im folgenden gebe ich einen neuen besonders kurzen Beweis desjenigen Teiles dieses Satzes, der sich auf die Ungleichung $F(W) \leqq 6\,F(K)$ bezieht, und beweise dann den entsprechenden Satz im Raume:

Satz 2. Bezeichnen wir den Vektorenbereich des beliebigen konvexen Körpers K mit W und die Volumina von K und W mit $V(K)$ und $V(W)$, so ist $8\,V(K) \leqq V(W) \leqq 20\,V(K)$; das erste Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn K einen Mittelpunkt besitzt, das zweite dann und nur dann, wenn K ein Tetraeder ist.

Dabei ist W entsprechend definiert.

1. K sei ein konvexer Bereich in der Ebene. $\overline{K}$ sei der Bereich, der aus K durch Spiegelung am Nullpunkte hervorgeht. Dann ist

$$F(W) = 2\,F(K) + 2\,F(K, \overline{K}), \quad (1)$$

wo $F(K, \overline{K})$ der gemischte Flächeninhalt von K und $\overline{K}$ ist.[2])

[1]) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XXXIV (1925), S. 64 ff. Der Satz (ohne Beweis) rührt von Herrn Blaschke her.

[2]) Rademacher, a. a. O., Formel (4).

Hilfssatz 1. Sind K_1, K_2 und K_3 konvexe ebene Bereiche und ist $K_2 \prec K_3$, so ist $F(K_1, K_2) \leqq F(K_1, K_3)$.

Dieser Satz entspricht der für konvexe Körper geltenden Formel (25) in Minkowskis Abhandlung „Volumen und Oberfläche“[3]) und kann nach derselben Methode bewiesen werden.

Hilfssatz 2. Zu jedem konvexen ebenen Bereich K gibt es einen konvexen Bereich K' mit Mittelpunkt, so daß

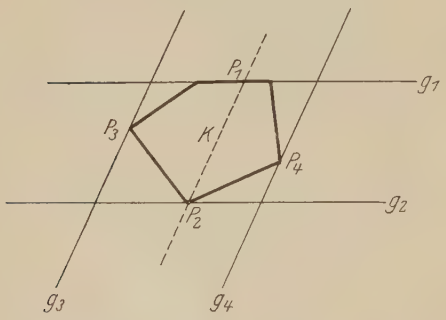
$$K \prec K' \tag{2}$$

und

$$F(K') \leqq 2\,F(K) \tag{3}$$

ist. Ist K kein Dreieck, so kann K' so gewählt werden, daß in (3) das Kleinerzeichen gilt.

Beweis. g_1 und g_2 seien zwei parallele Stützgeraden von K; P_1 und P_2 seien Berührungspunkte von g_1 bzw. g_2; g_3 und g_4 seien die beiden zu $P_1 P_2$ parallelen Stützgeraden; P_3 und P_4 seien Berührungspunkte von g_3 bzw. g_4. Bezeichnen wir dann das von den Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 gebildete Parallelogramm mit K', so sind (2) und (3) erfüllt, letzteres weil das in K enthaltene Viereck $P_1 P_3 P_2 P_4$ (das auch in ein Dreieck ausarten kann) bereits den Flächeninhalt $\frac{1}{2} F(K')$ hat. Ferner kann das Gleichheitszeichen in (3) nur dann gelten, wenn K mit dem Viereck (oder Dreieck) $P_1 P_3 P_2 P_4$ zusammenfällt. Das kann nur dann eintreten, wenn K ein Dreieck oder ein Viereck ist, und läßt sich im letzteren Falle dadurch vermeiden, daß wir als g_1 eine Seite von K und als P_1 einen Punkt wählen, der keine Ecke ist.



Wenn K' zu unserem Bereich K nach Hilfssatz 2 bestimmt wird, so gilt mit (2) auch $\overline{K} \prec \overline{K}'$ und daher nach Hilfssatz 1

$$F(K, \overline{K}) \leqq F(K', \overline{K}) \leqq F(K', \overline{K}'). \tag{4}$$

Da K' einen Mittelpunkt hat, ist[4])

$$F(K', \overline{K}') = F(K'). \tag{5}$$

[3]) Math. Annalen 57, S. 447ff. Im folgenden kurz als „V. u. O.“ zitiert.

[4]) Rademacher, a. a. O., S. 66 unten.

Aus (1), (4), (5) und (3) folgt $F(W) \leqq 6\,F(K)$, und das Gleichheitszeichen kann hier nach Hilfssatz 2 nur dann gelten, wenn K ein Dreieck ist. Daß es dann auch wirklich gilt, ist trivial.

2. K sei jetzt ein konvexer Körper. Da W sich nicht ändert, wenn K einer Translation unterworfen wird, so können wir annehmen, der Schwerpunkt von K liege im Nullpunkte.

Hilfssatz 3. Sind E_1 und E_2 zwei parallele Stützebenen von K, und sind C_1 und C_2 ihre Entfernungen vom Schwerpunkte, so ist $C_1 \leqq 3\,C_2$, und das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn K ein Kegel ist, dessen Spitze in E_1 und dessen Grundfläche in E_2 liegt.

Der erste Teil dieses Satzes rührt von Minkowski[5]) her.

Beweis. Die Ebene E sei den Ebenen E_1 und E_2 parallel und teile ihren Abstand innen im Verhältnis $3:1$. E teilt den übrigen Raum in zwei Halbräume R_1 und R_2. E_1 liege in R_1. Dann besagt der Satz, daß der Schwerpunkt von K entweder in R_1 oder auf E liegt, und daß letzteres nur bei Kegeln der genannten Art eintritt. P sei ein Berührungspunkt der Stützebene E_1 und K_1 sei der Kegel mit der Spitze P, dessen Grundfläche in E_2 liegt, und der mit E dieselbe Schnittfläche bildet wie K. Aus der Konvexität von K folgt dann leicht $K - KK_1 \prec R_1$ und $K_1 - KK_1 \prec R_2$, wo KK_1 den Durchschnitt von K und K_1 (d. h. den beiden Körpern gemeinsamen Teil) bezeichnet. K geht also aus dem Kegel K_1, dessen Schwerpunkt auf E liegt, durch Wegnehmen einer Teilmenge von R_2 und Hinzufügen einer Teilmenge von R_1 hervor, und dabei muß der Schwerpunkt offenbar nach R_1 hineinrücken, sobald eine dieser Mengen innere Punkte besitzt. Es ist aber leicht einzusehen, daß die Mengen $K - KK_1$ und $K_1 - KK_1$ innere Punkte besitzen, wenn sie nicht leer sind. Entweder liegt also der Schwerpunkt von K in R_1 oder $K - KK_1$ und $K_1 - KK_1$ sind leer, d. h. K ist mit dem Kegel K_1 identisch, w. z. b. w.

Nach Hilfssatz 3 ist stets

$$H(-\alpha, -\beta, -\gamma) \leqq 3\,H(\alpha, \beta, \gamma), \tag{6}$$

wo H die Stützebenenfunktion von K ist (V. u. O. § 1). Geht nun $\bar{K}$ aus K durch Spiegelung am Nullpunkte hervor, so ist $\bar{H}(\alpha, \beta, \gamma) = H(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ die Stützebenenfunktion von $\bar{K}$. Bezeichnen wir mit q das Maximum des Quotienten $\bar{H}:H$, so ist also nach (6)

$$q \leqq 3, \tag{7}$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn K ein Kegel ist. Nun gilt in Minkowskischer Bezeichnungsweise[6]) $\bar{K} \prec q\,K$ und daher nach V. u. O.

[5]) V. u. O. (59) und Gesammelte Abhandlungen 2, S. 203.

[6]) V. u. O. § 1, 4.

(25) und (26)

$$V(K,K,\bar{K}) \leqq q\,V(K,K,K) = q\,V(K). \tag{8}$$

Für die Stützebenenfunktion $U(\alpha,\beta,\gamma)$ von W gilt nun[7])

$$U(\alpha,\beta,\gamma) = H(\alpha,\beta,\gamma) + \bar{H}(\alpha,\beta,\gamma),$$

also ist nach V. u. O. (22)

$$V(W) = V(K,K,K) + 3\,V(K,K,\bar{K}) + 3\,V(K,\bar{K},\bar{K}) + V(\bar{K},\bar{K},\bar{K}).$$

Hier ist $V(K,K,K) = V(\bar{K},\bar{K},\bar{K}) = V(K)$ und (wegen der Symmetrie von K und $\bar{K}$) $V(K,K,\bar{K}) = V(K,\bar{K},\bar{K})$, also

$$V(W) = 2\,V(K) + 6\,V(K,K,\bar{K}). \tag{9}$$

Nach V. u. O. (62) ist nun

$$V(K,K,\bar{K}) \geqq \sqrt[3]{[V(K)]^2\,V(\bar{K})} = V(K), \tag{10}$$

und das erste Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn K und $\bar{K}$ homothetisch sind. Letzteres bedeutet in diesem Falle (da K und $\bar{K}$ dasselbe Volumen und denselben Schwerpunkt haben), daß K mit $\bar{K}$ identisch ist, d. h. daß K einen Mittelpunkt besitzt.

Aus (9), (10), (8) und (7) folgen alle Behauptungen des Satzes 2, sofern K kein Kegel ist.

Ist nun K ein konvexer Kegel, so können wir annehmen, die Grundfläche von K liege in der x-y-Ebene und enthalte den Nullpunkt, und die Spitze von K liege auf dem positiven Zweig der z-Achse. Das läßt sich nämlich durch eine lineare affine Transformation (die das Verhältnis $V(W):V(K)$ ja nicht ändert) erreichen. Es sei also G die Grundfläche und $(0,0,h)$ die Spitze von K. Dann ist

$$V(K) = \frac{1}{3}h\,F(G). \tag{11}$$

Bezeichnen wir die Schnittfläche von W mit der Ebene $z = t$ mit U_t, so ist offenbar

$$V(W) = \int_{-h}^{h} F(U_t)\,dt = 2\int_{0}^{h} F(U_t)\,dt \tag{12}$$

(da W den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat). Nach der Definition von W gehört ein Punkt (x,y) dann und nur dann zu U_t, wenn es in K zwei Punkte (x_1,y_1,z_1) und (x_2,y_2,z_2) gibt, so daß $x_2 - x_1 = x$, $y_2 - y_1 = y$ und $z_2 - z_1 = t$ ist. Ist nun $t \geqq 0$, so liegen mit (x_1,y_1,z_1) und (x_2,y_2,z_2) auch $(x_1,y_1,0)$ und (x_2,y_2,t) in K, d. h. (x_1,y_1) in G und (x_2,y_2) in

[7]) Vgl. Rademacher, a. a. O. 2, S. 65.

$\left(\frac{h-t}{h}\right) G$ (der Schnittfläche von K mit der Ebene $z = t$). (x, y) liegt also dann und nur dann in U_t, wenn es einen Punkt (x_1, y_1) in G und einen Punkt (x_2, y_2) in $\left(\frac{h-t}{h}\right) G$ gibt, so daß $x_2 - x_1 = x$ und $y_2 - y_1 = y$ ist. Hieraus folgt leicht, daß

$$U_t = \bar{G} + \left(\frac{h-t}{h}\right) G$$

ist (vgl. V. u. O. § 5, 25 und beachte, daß $(-x_1, -y_1)$ in G liegt, wenn (x_1, y_1) in G liegt). Daher ist (vgl. V. u. O. (38))

$$F(U_t) = F(\bar{G}) + 2\frac{h-t}{h} F(G, \bar{G}) + \left(\frac{h-t}{h}\right)^2 F(G)$$

und nach (12), (1) und (11)

$$(13) \quad V(W) = 2h\,F(G) + 2h\,F(G, \bar{G}) + \frac{2}{3} h\,F(G) - h\,F(U) + 2V(K),$$

wo U der Vektorenbereich von G ist. Bei Kegeln besteht also dieser einfache Zusammenhang zwischen dem Vektorenbereich des Körpers und dem der Grundfläche. Aus (13), (11) und Satz 1 folgt, daß hier sogar

$$14\,V(K) \leqq V(W) \leqq 20\,V(K)$$

ist und daß das erste Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn G einen Mittelpunkt besitzt, das zweite dann und nur dann, wenn K ein Tetraeder ist. Hiermit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Das beim Beweise des Satzes 2 benutzte Verfahren läßt sich auch auf Satz 1 anwenden. Dagegen ist es zweifelhaft, ob auch das Umgekehrte gilt, denn es ist bisher nicht bekannt, ob es zu jedem konvexen Körper K einen konvexen Körper mit Mittelpunkt gibt, der K enthält und höchstens das dreifache Volumen hat.

(Eingegangen am 12. September 1927.)

Über den Konvergenzbegriff der mathematischen Statistik.

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Unter einer Verteilungsfunktion $f(x)$ versteht man eine für $-\infty < x < +\infty$ erklärte, nicht abnehmende Funktion, welche den Randbedingungen $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = 1$ genügt. Der Bequemlichkeit halber wollen wir auch die beiden Funktionen $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$ Verteilungsfunktionen nennen. Wir bezeichnen mit f, f_ν usw. Verteilungsfunktionen, für welche sämtliche Integrale

$$\mathfrak{M}^{(n)}[f] = \mathfrak{N}^{(n)}[f] + \mathfrak{P}^{(n)}[f];$$
$$\mathfrak{N}^{(n)}[f] = \int_{-\infty}^{0} x^n \, df(x), \quad \mathfrak{P}^{(n)}[f] = \int_{0}^{+\infty} x^n \, df(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

konvergent sind. Die Zeichen $\to$, lim, lim sup, lim inf sollen sich immer auf den Buchstaben ν $(= 1, 2, \ldots)$ beziehen. Die Funktion f soll momentenbestimmt genannt werden, wenn es keine von f verschiedene Funktion f^* mit $\mathfrak{M}^{(n)}[f] = \mathfrak{M}^{(n)}[f^*]$ $(n = 0, 1, \ldots)$ gibt. Dabei werden zwei Funktionen f, f^* selbstverständlich als nicht verschieden betrachtet, wenn sie an ihren sämtlichen Stetigkeitsstellen oder (was dasselbe ist) auf einer für $-\infty < x < +\infty$ überall dichten Punktmenge übereinstimmen. Dementsprechend sagen wir, daß die Folge $\{f_\nu\}$ gegen die Grenzfunktion f konvergiert, und schreiben einfach $f_\nu \to f$, wenn $f = \lim f_\nu$ an sämtlichen Stetigkeitsstellen von f (also gewiß außerhalb einer abzählbaren Punktmenge) stattfindet. Dieser Konvergenzbegriff ist der natürliche Konvergenzbegriff der Theorie der monotonen Funktionen. Die mathematische Statistik hat aber einen ganz anderen Konvergenzbegriff, den wir Momentenkonvergenz nennen und durch $f_\nu [\to] f$ bezeichnen wollen [1]). Diese besagt,

[1]) Die Momentenkonvergenz verhält sich „ungefähr“ so zum Konvergenzbegriff der Theorie der monotonen Funktionen, wie die Fischersche Mittelkonvergenz zur Konvergenz bis auf eine Nullmenge.

daß $\mathfrak{M}^{(n)}[f] = \lim \mathfrak{M}^{(n)}[f_\nu]$ bei jedem n $(= 0, 1, \ldots)$ besteht. Daß dies tatsächlich der natürliche Konvergenzbegriff der Statistik ist, geht einerseits daraus hervor, daß bei einem Kollektivgegenstand die Verteilungsfunktion f unmittelbar nicht zugänglich ist, es können vielmehr nur ihre Momente $\mathfrak{M}^{(n)}[f]$, und freilich *auch diese nur innerhalb der Fehlergrenzen*, berechnet werden. Das eigentliche, in verschiedenen Gestalten wiederkehrende mathematische Grundproblem der Kollektivmaßlehre verlangt aus der Momentenfolge auf die Verteilungsfunktion zu schließen. Andererseits muß eine Ableitung z. B. des Gaußschen Fehlergesetzes — sofern sie im Rahmen von direkten statistischen Betrachtungen und ohne die von vornherein gemachte Voraussetzung geschieht, daß die Streuung des gefalteten (iterierten) Stieltjesschen Kernes konvergent ist — ebenso verlaufen: man muß von $f_\nu [\rightarrow] f$ zu $f_\nu \rightarrow f$ übergehen. Nun liegen bei den Anwendungen die Verteilungsgewichte „zum großen Teil im Endlichen". Es liegt also nahe, den Konvergenzbegriff $f_\nu \rightarrow f$ ein wenig einzuschränken. Es möge zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem festen n ein $M_n > 0$ aufgefunden werden können derart, daß für $R \geqq M_n$

$$(0 \leqq) \int_R^{+\infty} x^n \, df_\nu(x) + (-1)^n \int_{-\infty}^{-R} x^n \, df_\nu(x) < \varepsilon; \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

gilt. Wir sagen dann, daß die Folge $\{f_\nu\}$ statistisch regulär ist. Das wesentliche ist hierbei, daß es nicht vorausgesetzt wird, daß die verlangten Ungleichheiten gleichmäßig in bezug auf n gelten. — *Wir wollen ein für allemal voraussetzen, daß die Folge $\{f_\nu\}$ statistisch regulär ist.*

Es sei $f_\nu \rightarrow f$, und es soll $\lim \mathfrak{M}^{(n)}[f_\nu]$ bei jedem n vorhanden sein. Es sei n zunächst festgehalten. Wegen $\mathfrak{N}^{(n)} + \mathfrak{P}^{(n)} = \mathfrak{M}^{(n)}$ sind die beiden Zahlenfolgen $\mathfrak{N}^{(n)}[f_1], \mathfrak{N}^{(n)}[f_2], \ldots$; $\mathfrak{P}^{(n)}[f_1], \mathfrak{P}^{(n)}[f_2], \ldots$ gewiß beschränkt, wenn n gerade ist, und mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichheit auch dann, wenn n ungerade ist. Mithin sind die beiden Integrale $\mathfrak{N}^{(n)}[f]$, $\mathfrak{P}^{(n)}[f]$ konvergent. Es ist ferner für $x \geqq 0$ mit leicht verständlicher Bezeichnung $x^n \, df_\nu(x) \geqq 0$, so daß also

$$\mathfrak{P}^{(n)}[f] = \mathfrak{P}^{(n)}[\lim f_\nu] \leqq \liminf \mathfrak{P}^{(n)}[f_\nu]$$

ist. Nun muß hierbei das Gleichheitszeichen gelten. Denn sonst könnte man die Existenz einer höchstens von n abhängigen, also festen Zahl $A > 0$ voraussetzen, bei welcher $\mathfrak{P}^{(n)}[f_\nu] > \mathfrak{P}^{(n)}[f] + 2A$ ausfallen würde $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Es würde dann aber zu jedem ν eine Zahl $N = N_\nu$ geben derart, daß

$$\int_0^R x^n \, df_\nu(x) > \int_0^R x^n \, df(x) + A \quad \text{für} \quad R \geqq N_\nu.$$

Dies ist jedoch mit Rücksicht auf die statistische Regularität unmöglich, da nach Herrn Helly [2])

$$\int_0^R x^n\, df_\nu(x) \to \int_0^R x^n\, df(x) \qquad (0 < R < +\infty).$$

Folglich ist $\mathfrak{P}^{(n)}[f] = \liminf \mathfrak{P}^{(n)}[f_\nu]$. Da diese Betrachtung auch für jede Teilfolge der Folge $\{f_\nu\}$ gilt, so ist also $\mathfrak{P}^{(n)}[f] = \lim \mathfrak{P}^{(n)}[f_\nu]$. Ebenso beweist man, daß bei geradem n der Vertauschungssatz $\mathfrak{N}^{(n)}[f] = \lim \mathfrak{N}^{(n)}[f_\nu]$ gilt. Ist aber n ungerade, so ist $x^n\, df_\nu(x) \leqq 0$ für $x \leqq 0$, so daß $\mathfrak{N}^{(n)}[f] \geqq \limsup \mathfrak{N}^{(n)}[f]$, und man beweist wie oben, daß hierbei das Gleichheitszeichen gelten muß. So erhält man den folgenden

Hilfssatz. *Ist* $f_\nu \to f$ *und ist* $\lim \mathfrak{M}^{(n)}[f_\nu]$ *bei jedem* n *vorhanden, so ist* $f_\nu [\to] f$.

Die vorstehende Schlußweise ergibt übrigens (mit Heranziehung des Diagonalverfahrens) auch den folgenden

Satz I. *Ist* $f_\nu \to f$ *und ist* $\limsup \mathfrak{M}^{(n)}[f_\nu] < +\infty$ *bei jedem* n, *so gibt es eine Teilfolge* $\{f_{j_\nu}\}$ *so, daß* $f_{j_\nu} [\to] f$.

Uns interessiert jedoch die umgekehrte Frage, wo die Momentenkonvergenz nicht die Behauptung, sondern die Voraussetzung ist. Sie läßt sich in bekannter Schlußweise [3]) auf die obige zurückführen, wenn man den wichtigen Auswahlsatz heranzieht, den Herr Helly loc. cit. bewiesen hat. Unsere Beantwortung des zweiten Problems ist an sich praktisch unbrauchbar, sie bringt jedoch das Problem mit sehr genau untersuchten Fragen in Zusammenhang, so daß wir auch über das schärfste bisher in dieser Richtung bekannte Resultat, dasjenige von Herrn Pólya [4]) — der als erster das Problem allgemein in Angriff genommen hat —, unter der Annahme der statistischen Regularität noch hinausgehen können. Zu diesem Ende beweisen wir den angekündigten

Satz II. *Aus* $f_\nu [\to] f$ *folgt* $f_\nu \to f$ *dann und nur dann, wenn* f *momentenbestimmt ist.*

Der zweite Teil dieses Satzes ist trivial. Denn haben zwei verschiedene Funktionen dieselbe Momentenfolge $\{\mathfrak{M}^{(n)}[f]\}$, so kann nicht $f_\nu \to f$ aus $\mathfrak{M}^{(n)}[f_\nu] \to \mathfrak{M}^{(n)}[f]$ $(n = 0, 1, \ldots)$ folgen. Der erste Teil ist hingegen nicht ohne Interesse: ist die Momentenfolge $\{\mathfrak{M}^{(n)}[f]\}$ überhaupt

[2]) E. Helly, Wiener Sitzungsberichte 1912, S. 288–290.
[3]) Vgl. z. B. C. Carathéodory, Berliner Sitzungsberichte 1920, S. 561.
[4]) G. Pólya, Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 161ff.

derart, daß sie nur zu einer einzigen Funktion f gehört, so kann diese Funktion aus jeder sie momentenkonvergent approximierenden, statistisch regulären Folge $\{f_\nu\}$ ohne Auswahlverfahren, einfach durch den Grenzübergang $\lim f_\nu(x)$, berechnet werden.

Um diesen ersten Teil des Satzes zu beweisen, nehmen wir zwecks Zurückführung ad absurdum die Unrichtigkeit der Behauptung an. Dann gibt es nach dem Hellyschen Satz zwei konvergente Teilfolgen $\{f_{i_\nu}\}$, $\{f_{j_\nu}\}$, die zu zwei verschiedenen Grenzfunktionen $\bar{f}$, $\bar{\bar{f}}$ gehören, trotzdem die Funktion f momentenbestimmt ist. — Nach Voraussetzung ist $f_\nu[\to]f$, also erst recht $f_{i_\nu}[\to]f$. Mithin sind die Grenzwerte $\lim \mathfrak{M}^{(n)}[f_{i_\nu}]$ vorhanden, so daß nach dem Hilfssatz auch $f_{i_\nu}[\to]\bar{f}$ gilt. Da f momentenbestimmt ist, so folgt daraus $f=\bar{f}$. [5]) Ebenso ist $f=\bar{\bar{f}}$, also $\bar{f}=\bar{\bar{f}}$, im Widerspruch mit der Voraussetzung.

Nach Herrn Carleman [6]) ist jede (eigentliche) Verteilungsfunktion f, bei welcher die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{M}^{(n)}[f]|^{-\frac{1}{2n}}$ divergiert, gewiß momentenbestimmt. Demnach folgt aus $f_\nu[\to]f$ gewiß $f_\nu \to f$ bei allen Verteilungsfunktionen f, bei welchen die Momentenfolge nicht allzu stark anwächst, oder, wie wir sagen können, welche nicht allzu stark zerstreut sind. Herr Hamburger [7]) hat noch vor Herrn Carleman bewiesen, daß f gewiß momentenbestimmt ist, wenn $\sqrt[2n]{\mathfrak{M}^{(n)}[f]} = O(n)$ ausfällt. Herr Pólya hat loc. cit. durch direkte Abschätzungen und auf Grund eines interessanten diskontinuierlichen Faktors gezeigt, daß aus $f_\nu[\to]f$ gewiß $f_\nu \to f$ folgt, wenn die Bedingung $\sqrt[2n]{\mathfrak{M}^{(n)}[f]} = O(n)$ erfüllt ist. Nach dem obigen genügt hierbei bereits $O(n \log n)$ usw., sofern, im Gegensatz zu Herrn Pólya, die statistische Regularität der approximierenden Folge vorausgesetzt wird. Es ist jedoch nicht möglich, in *dieser* Richtung über das Pólyasche $O(n)$ wesentlich hinauszugehen. Denn Herr Hamburger hat loc. cit. eine nichtmomentenbestimmte Funktion konstruiert, bei welcher die Abschätzung $\sqrt[2n]{\mathfrak{M}^{(n)}[f]} = O(n^{1+\delta})$ bei jedem $\delta > 0$ gilt. Unlängst habe ich aber darauf hingewiesen, daß es völlig *qualitative* hinreichende Kriterien gibt. Um nur den einfachsten (übrigens hier vor allem wichtigen) derartigen Satz zu erwähnen: Die Verteilungsfunktion f ist *in einem gewissen Sinne* momentenbestimmt, wenn sie auf der positiven oder negativen Halbgeraden konstant ist. Diese Bedingung ist in der Theorie der Beobachtungsfehler bei sinngemäßer An-

[5]) Die Gleichheit an sämtlichen Stetigkeitsstellen von f verstanden.

[6]) Siehe z. B. T. Carleman, Les fonctions quasi analitiques, Paris 1926, S. 81.

[7]) H. Hamburger, Math. Zeitschr. **4** (1919), S. 209–211; vgl. G. Pólya, Astr. Nachr. **208** (1919), S. 185ff.

ordnung der Betrachtungen von vornherein axiomatisch erfüllt; dort braucht man also die Dispersion überhaupt nicht einzuschränken.

Wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, kann man daraus das Gaußsche Fehlergesetz im Rahmen der statistischen Auffassung und ohne eine verhüllte oder weniger verhüllte Einschränkung der Dispersion der zugelassenen Funktionen als das einzig mögliche symmetrische Beobachtungsfehlergesetz gewinnen. Man beachte, daß dabei die Endlichkeit aller Integrale $\mathfrak{M}^{(n)}[f]$ vorausgesetzt wird, doch ist dies eine natürliche Einschränkung (s. o.).

(Eingegangen am 27. November 1927.)

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Grundzüge der theoretischen Logik

Von

D. Hilbert

Geh. Regierungsrat, Professor an der Universität Göttingen

und

W. Ackermann

Göttingen

VIII, 120 Seiten. 1928. RM 7.60; gebunden RM 8.80

Inhaltsübersicht: Der Aussagenkalkül. Der Prädikaten- und Klassenkalkül. Der engere Funktionenkalkül. Der erweiterte Funktionenkalkül. Literatur-, Namen- und Sachverzeichnis.
(Bildet Band XXVII der Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.)

Der absolute Differentialkalkül
und seine Anwendungen in Geometrie und Physik

Von

Tullio Levi-Civita

Professor der Mechanik an der Universität Rom

Autorisierte deutsche Ausgabe von

Adalbert Duschek

Privatdozent der Mathematik an der Technischen Hochschule Wien

Mit 6 Abbildungen. XI, 310 Seiten. 1928. RM 19.60, gebunden RM 21.—

Inhaltsübersicht: Algebraische Grundlagen. Die Geometrie der quadratischen Differentialformen: Das Bogenelement einer Fläche. Parallelismus auf der Fläche. Verallgemeinerung des Vorstehenden für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit beliebiger Metrik. Kovariante Ableitungen. Invarianten und Differentialparameter. Örtlich geodätische Koordinaten. Der Riemannsche Krümmungstensor und die Krümmung einer M_n. Zwei verschiedene Maßtensoren auf einer V_n. Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung. Quadratische Differentialformen von der Klasse Null und Eins. Kurvenkongruenzen auf einer M_n. Die Entwicklung der Mechanik und der geometrischen Optik und ihre Beziehung zu Einsteins vierdimensionaler Welt. Die Gravitationsgleichungen und die allgemeine Relativitätstheorie. Anhang. Namen- und Sachverzeichnis.

(Bildet Band XXVIII der Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.)

Mathematische Strömungslehre

Von

Dr. Wilhelm Müller

Privatdozent an der Technischen Hochschule Hannover

Mit 137 Textabbildungen. IX, 239 Seiten. 1928. RM 18.—, gebunden RM 19.50

Inhaltsübersicht: Grundgesetze der Strömungslehre. Umformungen und funktionentheoretische Hilfsmittel. Strömungen um feste Körper. Stromfelder mit freien und gebundenen Wirbeln. Einfluß von Zirkulationen und Wirbeln auf den Strömungsdruck an zylindrischen Körpern. Methode des unstetigen Potentials. Theorie des Tragflügels. Aus der Theorie des Propellers. Strömung in Kreisel- und Turbinenrädern.

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik veröffentlichen wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Kowalewski, G., Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Vierte, verbesserte Auflage, vermehrt durch einen Anhang über Fredholmsche Determinanten und Integralgleichungen. Gr.-8°. IV, 417 S. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1928.

Fladt, K., Quellenhefte zur Elementarmathematik. Bd. I. Elementargeometrie. 1. Heft: Der Stoff bis zur Untersekunda. Gr.-8°. VI, 73 S. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1928.

Fladt, K., Elementarmathematik. Bd. I. Elementargeometrie. 2. Teil: Der Stoff bis zur Untersekunda (Planimetrie und Stereometrie). Gr.-8°. VIII, 181 S. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1928.

Odqvist, Folke K. G., Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. Inaugural-Dissertation. 86 S. Gr.-8°. P. A. Norstedt et Söner, Stockholm, 1928.

Noether, F., Berechnung von elektrischen Strömungsfeldern. S. 76—102. Gr.-8°. (Sonderabdruck aus dem Handbuch der Physik, Bd. XIII.)

Hamel, G., Die Axiome der Mechanik. S. 1—42. Gr.-8°. (Sonderabdruck aus dem Handbuch der Physik, Bd. V.)

Winkelmann, M. und **R. Grammel, Kinetik der starren Körper.** S. 373—483. Gr.-8°. (Sonderabdruck aus dem Handbuch der Physik, Bd. V.)

Zerner, F., Die Maxwell-Hertz'sche Theorie. S. 1—145. Gr.-8°. (Sonderabdruck aus dem Handbuch der Physik, Bd. XII.)

Zerner, F., Die Elektronentheorie. S. 146—244. Gr.-8°. (Sonderabdruck aus dem Handbuch der Physik, Bd. XII.)

Hobson, E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Vol. I. 3d ed. XV, 736 S. Gr.-8°. Cambridge, University Press, 1927.

Weierstrass, K., Mathematische Werke. Bd. VII. Vorlesungen über Variationsrechnung. Bearbeitet von R. Rothe. VIII, 324 S. Gr.-4°. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1927.

Metz, A., Temps, espace, relativité. Kl.-8°. 211 S. Paris, G. Beauchesne, 1928. (Science et Philosophie II.)

Brunschvicg, L., La philosophie d'Émile Meyerson. 39—63 S. Gr.-8°. (Sonderabdruck aus der Revue de Métaphysique et de Morale.)

Sierpiński, W., Zarys teorji mnogości. Część druga: Topologja ogólna. VIII, 232 S. Gr.-8°. Wydawnictwo Kasy imienia Mianowskiego. Warszawa, 1928. Pałac Staszica.

Hierzu eine Beilage vom Verlag Julius Springer in Berlin W 9.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.